

Actividad 1: ESTUDIO GEOMÉTRICO DE UN SISTEMA DE ECUACIONES DEPENDIENTE DE UN PARÁMETRO.

Estudiar la posición relativa de los siguientes planos en función del valor de a.

$$\begin{cases} x + ay + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + az = 3 \end{cases}$$

Pistas:

- Los cálculos los hacemos en la ventana CAS.
- Construir la matriz de los coeficientes. Conviene recordar que para definir una matriz basta hacer una lista de listas. Así la matriz pedida sería $A := \{\{1, a, 3\}, \{1, 1, -1\}, \{2, 3, a\}\}$.
- Resolver la ecuación formada por el **Determinante[A]** en la variable a.
- Se crea un deslizador p en la ventana gráfica de 2D y en la ventana CAS se calcula la matriz escalonada correspondiente a la matriz ampliada B donde se ha sustituido el parámetro a por el deslizador p. Es decir, la orden **EscalonadaReducida[Sustituye[B,a,p]]**. Basta mover el deslizador y comprobar qué pasa en los casos en que se anula el determinante.
- Por último definimos los planos sustituyendo el parámetro a por el deslizador p, por ejemplo $\mathbf{r} := \mathbf{x} + \mathbf{p} * \mathbf{y} + 3\mathbf{z} = 1$. Una vez tengamos los tres planos podemos mover el deslizador y comprobar la posición relativa de los tres planos.

Actividad 2: VECTORES EN EL ESPACIO.

Se consideran los vectores $\vec{u} = (k, 1, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, -2)$ y $\vec{w} = (1, 1, k)$, donde k es un número real.

- Determina los valores de k para los que \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} son linealmente dependientes.
- Determina los valores de k para los que $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{v} - \vec{w}$ son ortogonales.
- Para $k = -1$, determina aquellos vectores que son ortogonales a \vec{v} y \vec{w} y tienen módulo 1.

Pistas:

- Basta definir en la ventana CAS los vectores directamente, por ejemplo, $\mathbf{u} := (k, 1, 1)$. Los que dependan de un parámetro no se visualizarán en la ventana 3D.
- Para el apartado a resolvemos el determinante formado por u, v y w en la variables k.
- Para el b basta resolver el producto escalar que corresponde al producto normal. Así la orden **Resuelve[(u+v) (v-w)=0,k]** nos da el valor buscado.
- Para el tercer apartado definimos un nuevo vector w1 sustituyendo en w k por -1. Para hallar el vector ortogonal de módulo 1 utilizamos el producto vectorial y el comando que calcula el vector unitario. Sería la orden **VectorUnitario[v ⊗ w1]**. Para el vector contrario al obtenido bastaría cambiar v y w1.
- Para finalizar, si queremos ver claramente que los vectores son perpendiculares a los dados, se puede dibujar el plano que contiene a los vectores v y w1. Para ello basta multiplicar escalarmente (x,y,z) por el vector normal calculado e igualar a cero.

Actividad 3: CONSTRUCCIÓN DE UNA HÉLICE.

Dibujar un cilindro y un punto que recorra su superficie dando lugar a una hélice.

Pista: Crear un deslizador numérico que recorra desde 0 hasta 4π para que de dos vueltas. Hacer que el punto gire respecto al eje del cilindro y aumente respecto a ese eje en función del deslizador.

Las órdenes básicas son:

- **Cilindro[Punto, Punto, radio]** donde los puntos son los centros de las circunferencias de las bases.
- **Rota[objeto, ángulo, eje de rotación]**. El eje de rotación será la recta que pasa por los dos puntos anteriores, el ángulo dependerá del deslizador.
- Para que aumente basta sumar a la expresión anterior $(0,0,h)$ donde h dependerá del deslizador y será el elemento que aumenta en altura.
- Es aconsejable utilizar para el cilindro dos puntos del eje Z. En ese caso en la orden de rotación se puede poner directamente ese eje (**EjeZ**).

Actividad 4: GENERACIÓN DE LAS CÓNICAS.

Dibujar un cono limitado y un plano dependiente de cuatro deslizadores. Hallar la intersección entre el cono y el plano y estudiar la generación de las cónicas. Para la hipérbola será necesario dibujo un cono ilimitado.

Las órdenes básicas son:

- Lo primero es crear cuatro deslizadores y un plano que dependa de ellos.
- **Cono[Punto, Punto, radio]**. El primer punto es el centro de la circunferencia base que tiene de radio el tercer parámetro. El segundo punto es el vértice. Sirve para hallar la circunferencia, elipse y parábola.
- **ConoInfinito[Punto, recta, ángulo]**. El punto es el sobre el que gira la recta generatriz, la recta es el eje de rotación (se puede sustituir por un vector o un segundo punto que forma el eje con el primero) y el ángulo da la inclinación de la generatriz respecto del eje. Con él se obtiene la hipérbola.
- **Interseca[objeto, objeto]**. Permite hallar la intersección entre el plano y el cono. Sobre el plano, con el menú contextual, podemos visionar la intersección en una ventana auxiliar.

Actividad 5: ESFERAS TANGENTES.

Ocho esferas iguales, de radio r y tangentes dos a dos, reposan sobre un plano horizontal y sus centros forman un octógono regular. Determinar el radio de la esfera tangente al plano y tangente a las ocho esferas.



Problema tomado del Calendario Matemático de la Sociedad Al-Khwarizmi del curso 2013–2014.

Pista: Dibuja las ocho esferas con radio 1 y dibuja la esfera central con un radio dependiente de un deslizador. Halla el valor aproximado del radio de la esfera estudiando cuando es tangente. Si quieres hallar el valor exacto, utiliza la ventana CAS.