Estadística y Probabilidad en el Proyecto Gauss

José Luis Álvarez
Rafael Losada

Resumen

Se valora la importancia del uso de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la Estadística y de la Probabilidad. Se expone la propuesta de tratamiento de estos contenidos en el Proyecto Gauss y su organización en tres secciones: Recuento, Medidas y Estimación. Se presentan a continuación un buen número de actividades de cada una de las secciones. Cada una de las actividades está compuesta por una construcción realizada con GeoGebra, una introducción, unas breves instrucciones de uso y, sobre todo, un cuestionario especialmente diseñado para que los alumnos manipulen la construcción para responderlo. Todos los ejemplos pertenecen al Proyecto Gauss del ITE, por lo que se encuentran accesibles a toda persona interesada.

Palabras clave

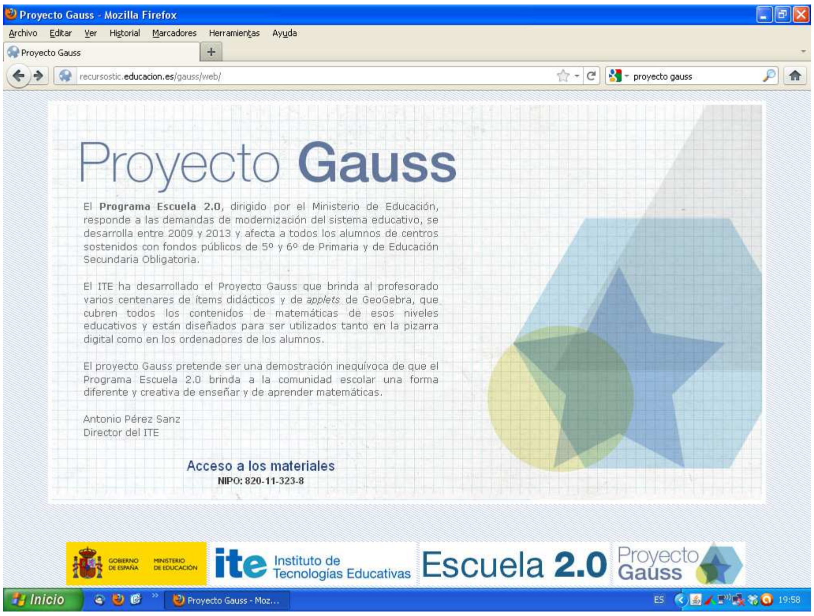
Proyecto Gauss, GeoGebra, ITE, Primaria, ESO, Estadística, Probabilidad, Actividad.

TIC en la enseñanza de la Estadística y de la Probabilidad

"*La tecnología es fundamental en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y enriquece su aprendizaje*"[1]. Esta declaración del National Council of Teachers of Mathematics, que compartimos plenamente, adquiere un especial significado en el caso de la Estadística y de la Probabilidad, de tal modo que nos atrevemos a afirmar que su enseñanza y aprendizaje no tiene sentido en estos tiempos si no es empleando las tecnologías disponibles.

Por una parte, el uso de la tecnología permite abordar datos reales y actuales y facilita que el alumno pueda centrarse en la resolución de los problemas verdaderamente relevantes que se le plantean y no en cálculos y procesos rutinarios. De ese modo, podrá prestar más atención a cuál ha de ser el mejor modo de resumir la información mediante las tablas más adecuadas, en elegir los gráficos que mejor destaquen lo más reseñable de dicha información, en reflexionar sobre qué parámetros son los que mejor representan al conjunto de datos y, por último, en sintetizar cuáles son las principales conclusiones del estudio que lleva a cabo. Todos los cálculos y construcciones se facilitan enormemente con el uso de las TIC, que permitirán además conjugar muy eficazmente los aspectos técnicos, funcionales y estéticos que la presentación de la información de naturaleza estadística exige hoy en día. Quedan obsoletos los procedimientos clásicos de cálculo manual de parámetros a partir de complicadas e interminables tablas o la confección manual de las tablas y gráficos estadísticos.

Otra destacada función de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, en general, y de la Estadística y de la Probabilidad, en particular, es facilitar la comprensión de conceptos y de propiedades. Aquí es donde juegan un papel muy importante los applets interactivos como los que se ofrecen en el Proyecto Gauss[2], sobre los que trataremos en el presente artículo.



Seguramente, el mayor valor que ofrecen los applets es la facilidad con que invitan a la exploración, a la investigación particular. Los applets del Proyecto Gauss presentan cada escenario procurando mantener el equilibrio entre interactividad y claridad. De este modo, podemos explorarlos y conseguir buenos resultados en poco tiempo. Los profesores podemos dirigir, animar, ayudar y valorar, pero las actividades interactivas invitan a que sean los alumnos los auténticos protagonistas de su propio aprendizaje.

El beneficio obtenido con su uso es, en gran parte, fruto de nuestro propio esfuerzo. La simple manipulación de un applet exige un mínimo de atención, algo que no está garantizado en el alumnado presente en una clase magistral o en el público asistente a una conferencia, por ejemplo. Aunque, si el applet nos resulta atractivo, es probable que no seamos conscientes de la atención prestada. A su vez, el cuestionario impulsa una y otra vez a una exploración más profunda de cada escena, reavivando nuestra curiosidad e interés por encontrar una solución a la situación planteada.

Como consecuencia de nuestra exploración, el applet también nos incita a la comunicación de los descubrimientos realizados. La mayoría de las actividades del Proyecto

Gauss admiten diversas formas de aproximación, argumentación y comprobación o refutación de nuestras propias observaciones. Incluso, en un escenario de aprendizaje en grupo, puede ser recomendable establecer un tiempo mínimo para que todos podamos explorar sin prisas los diferentes escenarios antes de compartir nuestras observaciones.

Otra característica de gran valor propia de los applets es la retroalimentación que resulta de la interactividad con el sistema. A cada acción nuestra le corresponde una reacción de los elementos en escena. La observación de esta reacción nos provoca nuevas acciones. Además, estas nuevas acciones no son aleatorias -si a veces lo son es porque todavía estamos “tanteando” el terreno- sino que van encaminadas, acuciadas por el cuestionario, a conseguir un estado de la escena acorde con nuestros deseos o a reinterpretar las relaciones de los elementos en juego. Esta continua retroalimentación entre nuestras acciones y sus consecuencias, además de acentuar nuestra sensación de protagonismo, favorece un tipo de aprendizaje basado más en la experiencia, en la observación y comprobación, que en la memorización y repetición de procedimientos predefinidos.

Cada actividad del Proyecto Gauss se caracteriza por añadir a la visualización, animación e interacción que permite el applet, una intención definida. El texto introductorio facilita el acercamiento a la situación, pero en la mayoría de los casos es el texto de cada pregunta el que perfila las líneas de acción. La interpretación correcta de estos textos es esencial y exige, de nuevo, el consiguiente esfuerzo de atención por nuestra parte. Como sabemos, es habitual que, en matemáticas, la dificultad de la correcta comprensión de los textos no estribe en su extensión sino en la extrema precisión en el uso de los términos. La brevedad de los textos debe animarnos a releer, si es preciso, varias veces el mismo texto. Con frecuencia, los pocos segundos invertidos en ello pueden ahorrarnos muchos minutos de acciones inconsistentes con el tipo de actividad que se pretende que realicemos.

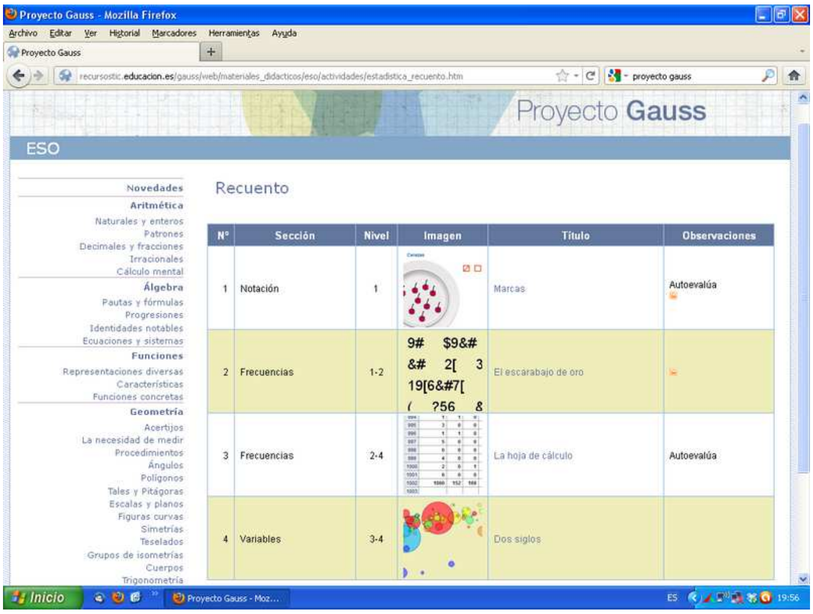
Finalmente, los applets favorecen muy distintos tipos de interconexiones: entre imágenes estáticas y dinámicas, entre imágenes físicas y mentales, entre diferentes conceptos y representaciones, entre matemáticas y realidad, entre distintas áreas de las matemáticas o entre estas y otras áreas del conocimiento, entre orden y belleza, entre percepción y lógica... La riqueza de estas interconexiones favorece una visión de las matemáticas más abierta y profunda, más cultural, más humana.

Organización de las actividades en el Proyecto Gauss

Las actividades de ESO están clasificadas en cinco grandes bloques temáticos: Aritmética, Álgebra, Funciones, Geometría y Estadística-Probabilidad. En el caso de la Educación Primaria los bloques temáticos son únicamente Aritmética, Geometría y

Estadística-Probabilidad. Todas las actividades de Educación Primaria enlazan bien con una versión de nivel ligeramente superior, bien con otra similar en la ESO.

Tanto en la propuesta de Educación Primaria como en la de la ESO, las actividades de Estadística y Probabilidad del Proyecto Gauss se organizan en tres secciones: “Recuento”, “Medidas” y “Estimación”.



A continuación vamos a presentar algunos ejemplos de actividades de cada una de estas secciones.

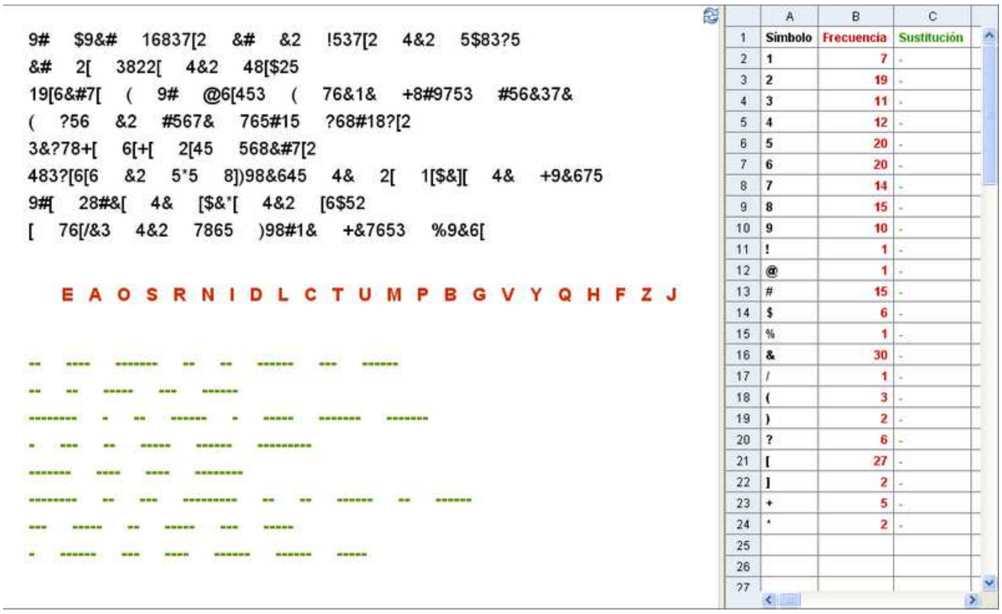
Recuento

Las actividades incluidas en esta sección tienen por objeto el manejo de técnicas eficaces de recuento, incluida la hoja de cálculo, la lectura e interpretación de gráficos, así como la resolución de problemas a partir de información de naturaleza estadística.

<u>El escarabajo de oro</u>

En este cuento de Edgar Allan Poe, el protagonista (el señor Legrand) encuentra un tesoro gracias a que es capaz de descifrar un texto en clave con las pistas suficientes para ir en su busca. En esta actividad se propone descifrar un texto (se trata del mismo texto del cuento de Poe, aunque el cifrado ha variado para adaptarlo a la traducción al español), utilizando la misma técnica que aplicó el señor Legrand, es decir, sustituyendo cada signo (cifra o símbolo) por una letra del abecedario, teniendo en cuenta que los signos se repetirán en el texto según la frecuencia de las letras a las que representan en el idioma español.

Además del texto cifrado, el estudiante dispone de la lista de las letras del abecedario ordenada según la frecuencia con la que suelen usarse. También conoce la frecuencia de aparición de cada uno de los símbolos en el texto cifrado.

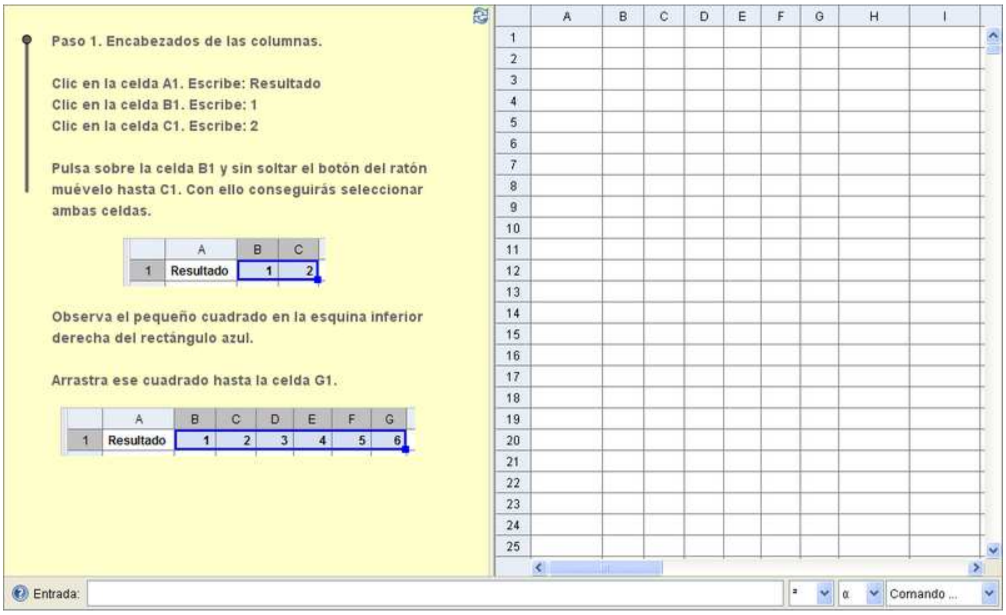


La actividad consiste en ir sustituyendo sucesivamente el símbolo que aparece con mayor frecuencia por la letra correspondiente, a continuación el segundo y así sucesivamente. La frecuencia de aparición de los símbolos en el texto no se corresponde exactamente con la frecuencia de aparición de las letras del abecedario en el español. Por ello en algunos momentos se producirán ambigüedades que se deben resolver con ayuda de los caracteres que ya se han sustituido previamente.

La hoja de cálculo

Las hojas de cálculo son herramientas muy poderosas, actualmente imprescindibles, para realizar rápidamente cálculos que afectan a grandes cantidades de datos. El uso de la hoja de cálculo para organizar los datos, realizar los cálculos y generar los gráficos más adecuados es uno de los contenidos del currículo de matemáticas de la ESO.

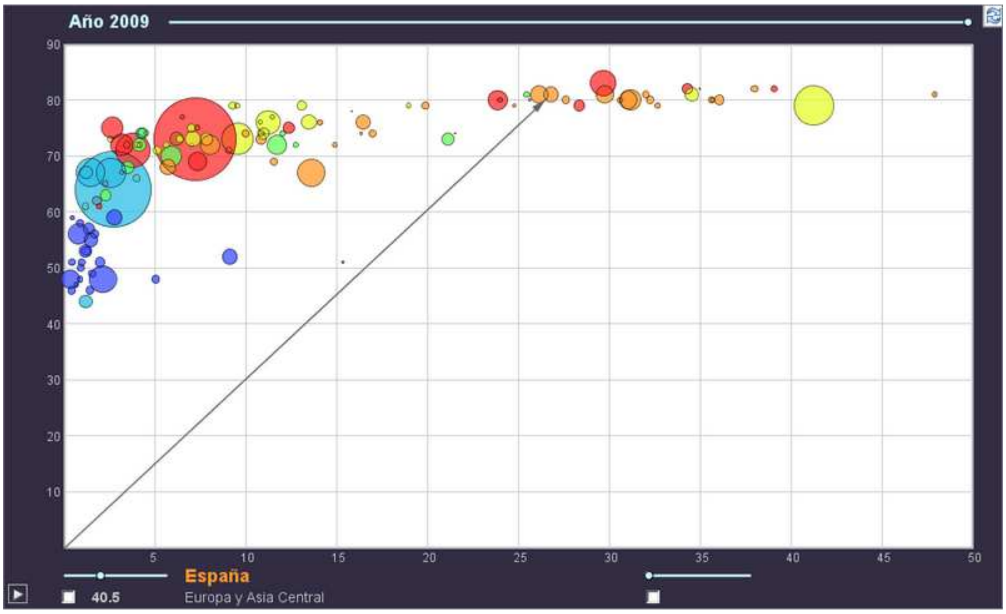
El objeto de esta actividad es utilizar la hoja de cálculo de GeoGebra para practicar los procedimientos habituales de las hojas de cálculo: introducir datos, copiar cálculos de forma masiva y realizar rápidas operaciones con gran número de valores. En concreto, se simula el experimento de arrojar 1000 dados y el recuento de la frecuencia con que aparece cada número del 1 al 6. En vez de realizar el recuento utilizando los comandos específicos de GeoGebra lo que se hace es practicar los procedimientos comunes de la hoja de cálculo, de modo que los aprendizajes tengan un carácter más polivalente.



En el applet, mediante un deslizador, se van proponiendo todos los pasos necesarios para introducir los datos, generar el lanzamiento de los dados y llevar a cabo el recuento de los resultados obtenidos.

Dos siglos

En esta actividad se maneja un gráfico dinámico que recoge los siguientes cinco datos de 119 países a lo largo de una línea de tiempo de más de dos siglos: **Nombre** (en el año 2010), **Zona geográfica**, **Población**, **Esperanza de vida al nacer** y la **Renta per cápita** (corregida la inflación). Los datos han sido extraídos de Gapminder[3].



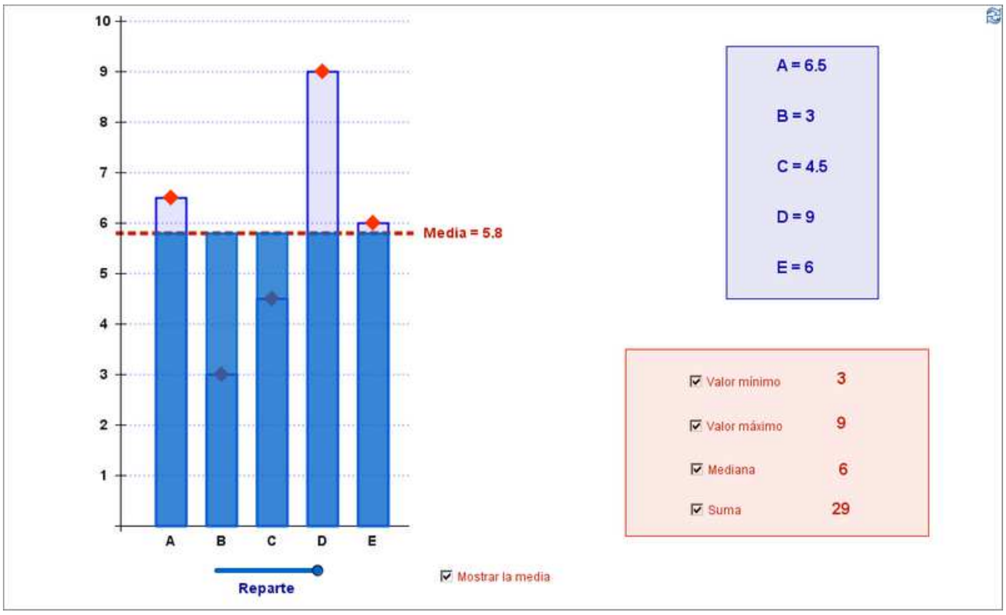
Se trata de identificar las diferentes variables que se manejan en el gráfico (código de colores para la zona geográfica, área de los círculos para la población, coordenadas para la renta per cápita y esperanza de vida, así como el deslizador que permite ver la evolución a lo largo del tiempo) y de interpretar la información proporcionada, tanto en lecturas locales como globales, comparando la evolución de los datos que se proporcionan de un determinado país a lo largo del tiempo o en comparación con otros países.

Medidas

En esta sección se incluyen actividades que tienen por objeto conocer y valorar las ventajas, pero también las limitaciones, de los parámetros estadísticos como resumen de un conjunto de datos, valorar cuáles son los parámetros más representativos de una determinada distribución y estimar las características básicas de una distribución a la vista de su gráfico (media, desviación típica, simetría…).

La media aritmética

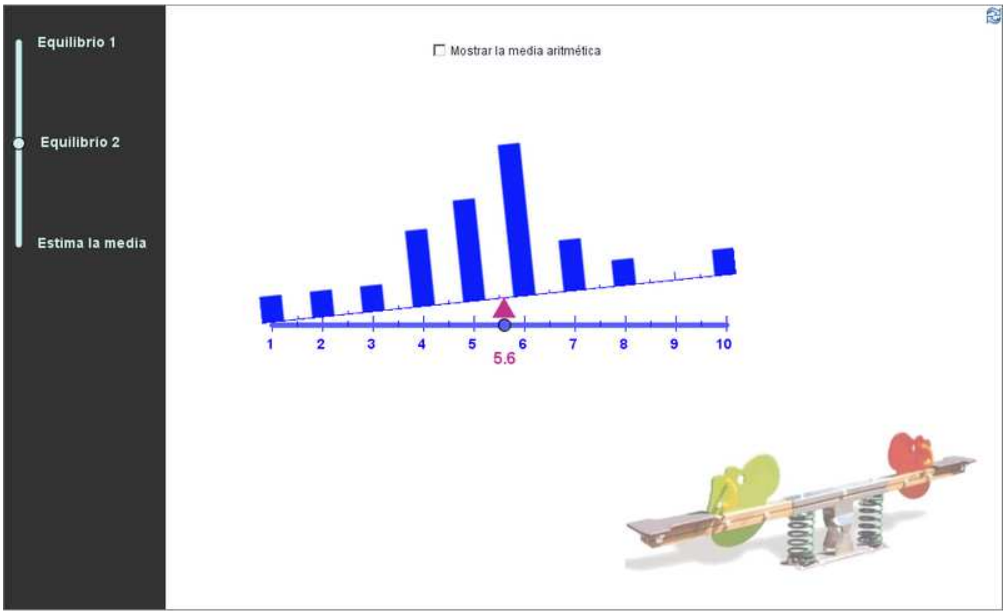
La media aritmética o promedio destaca por representar el reparto equitativo, el equilibrio, la equidad. Es el valor que tendrían los datos si todos ellos fueran iguales. O, también, el valor que correspondería a cada uno de los datos de la distribución si su suma total se repartiera por igual. En esta actividad se exploran algunas propiedades de la media aritmética, que se derivan de esta idea.



Se parte de un diagrama en el que cada uno de los datos de una distribución se representa por una barra vertical. De un modo análogo al de los vasos comunicantes, la manipulación del deslizador *Reparte* reconstruye el gráfico de modo que ahora todas las barras tienen la misma altura: la media aritmética. A través de las preguntas del cuestionario se explora el efecto que tiene la variación de alguno de los datos en la media: qué manipulaciones permiten mantener la misma media, qué datos proporcionan una media determinada, etc.

La media y la gráfica

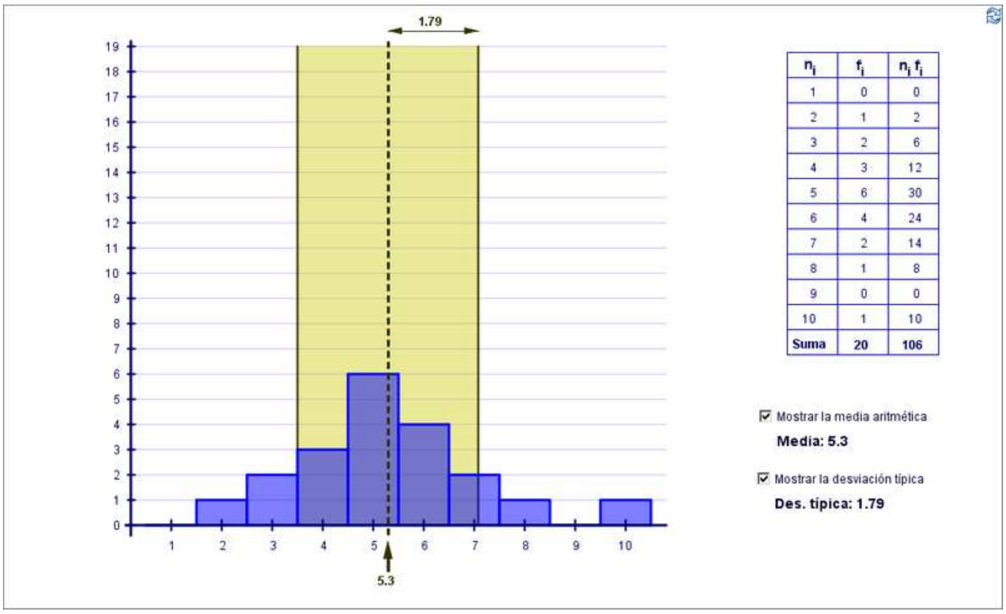
En esta actividad se investiga sobre cómo obtener un valor aproximado de la media aritmética a partir del histograma o, en su caso, el diagrama de barras de la distribución. Se trata de buscar el "punto de equilibrio" del gráfico o, dicho de otro modo, la proyección sobre el eje horizontal de su centro de gravedad.



Las primeras escenas del applet proponen buscar un punto tal que el gráfico, que se comporta a modo de balancín, quede en equilibrio: ese punto quedará determinado por la media aritmética de la distribución que se representa en dicho gráfico. En la tercera escena se ha de fijar sobre el eje horizontal la posición aproximada de la media. En este caso el gráfico es dinámico, lo que permite estudiar diferentes distribuciones. El applet ofrece además la posibilidad de comprobar los resultados.

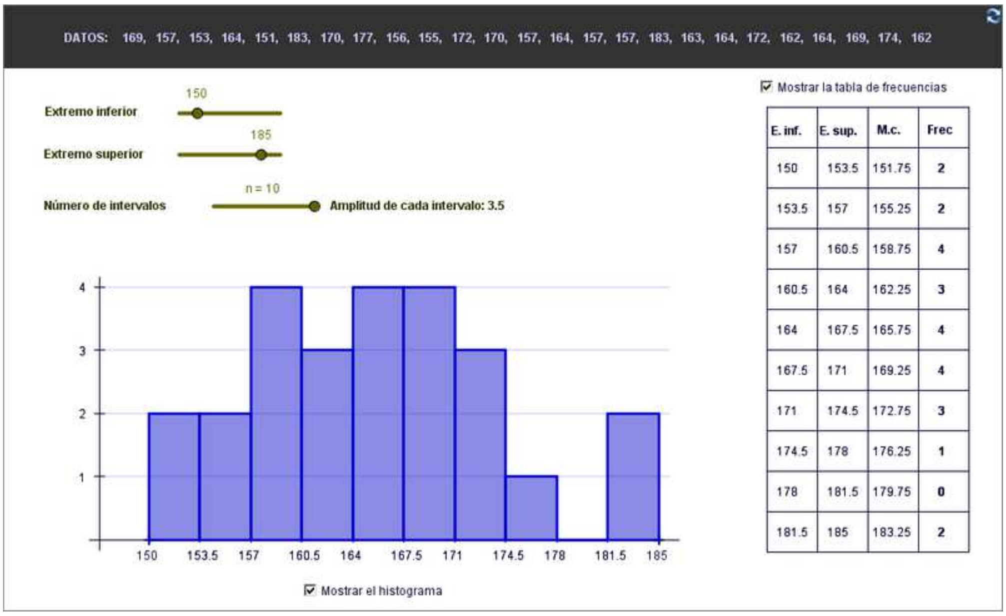
Media y desviación típica

En esta ocasión se trata de encontrar la relación entre los valores de la media aritmética y la desviación típica de una distribución y la forma del histograma que la representa.



Histograma

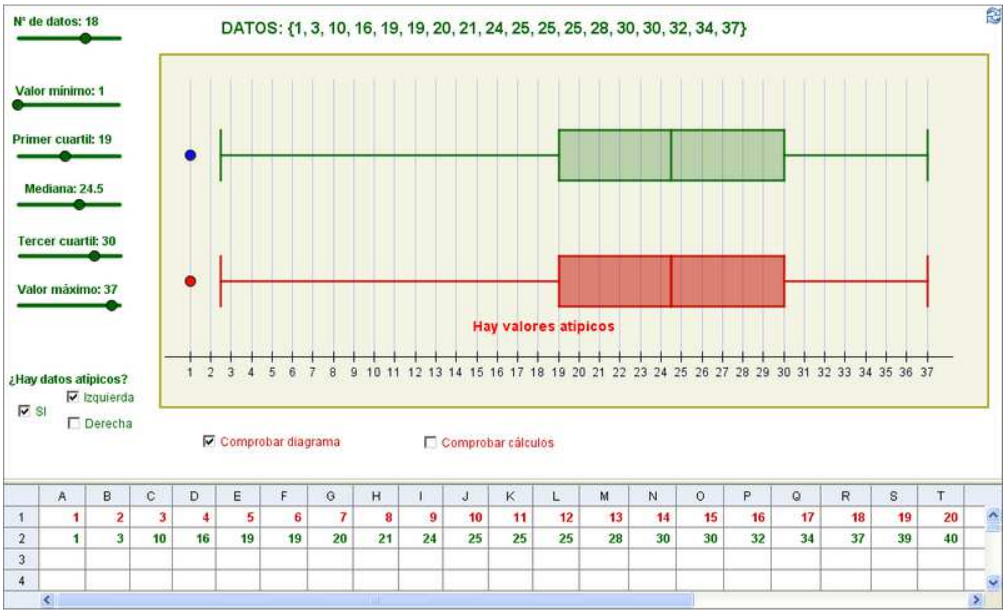
El objeto de esta actividad es poner en práctica el proceso de construcción del histograma representativo de una determinada distribución.



Las preguntas del cuestionario sirven de guía del proceso de construcción del histograma. Los controles de la aplicación permiten fijar el valor mínimo, el valor máximo y el número de intervalos, de modo que el histograma se construye de manera automática. Cada vez que se reinicia el applet cambian los datos de la distribución, proporcionando un nuevo problema.

Cuartiles y cajas

La mediana y los cuartiles son la base para la construcción de un diagrama de caja. Este tipo de diagrama permite valorar de una manera muy clara la posible asimetría de la distribución o la existencia de valores atípicos y facilita mucho la comparación entre varias distribuciones. Los datos que se emplean para su construcción constituyen el llamado resumen de cinco números de la distribución: valor mínimo, primer cuartil, mediana, tercer cuartil y valor máximo.



En esta actividad invita a construir el diagrama de caja correspondiente a una determinada distribución estadísticas, debiendo calcular antes los datos necesarios para su diseño. También se debe elaborar un breve informe en cada caso, utilizando como referencia tanto el gráfico como los parámetros característicos de la distribución. Cada vez que se reinicia la aplicación, cambia la distribución de datos.

Estimación

Durante mucho tiempo, en los problemas probabilísticos escolares se ha puesto el énfasis casi exclusivamente en la cuantificación. Una consecuencia de ello es que la intuición de la mayoría de las personas ante los fenómenos relacionados con el azar que se le presentan en la vida cotidiana está más influenciada por sus propias experiencias personales, por los medios de comunicación o por creencias populares de lo más variopinto, que por los conocimientos que posee para enfocar la situación con mirada matemática.

Plantear como objetivo educar la intuición supone, entre otras cosas, analizar el comportamiento de los fenómenos aleatorios, observar las regularidades que se presentan al repetir un experimento y contrastar los resultados experimentales con los cálculos teóricos. Ese es el objeto de las actividades de esta sección.

Mateprix

En esta actividad se trata de simular una peculiar carrera de coches. Se trata de un juego para 3 jugadores y el movimiento de sus coches estará regido por el lanzamiento de dos monedas: uno de ellos avanzará su coche hacia la siguiente casilla cuando el resultado del lanzamiento son dos caras; otro de ellos cuando se obtienen dos cruces y el tercero cuando se obtiene una cara y una cruz.

La situación de los coches sobre el tablero al final de la carrera es elocuente. La comparación de los resultados obtenidos tras cada partida por los diferentes equipos invita a la reflexión, guiada por el cuestionario, sobre la situación planteada, buscando la justificación de los resultados obtenidos y tratando de encontrar otras reglas de juego más justas.

Autos locos

También se trata de simular una carrera de tres coches, como en el caso anterior, pero ahora el avance de los coches está regido por el lanzamiento de un dado. Uno de los jugadores lanza un dado tetraédrico, el segundo un dado hexaédrico y el tercero un dado octaédrico. Tras cada lanzamiento, el coche del jugador avanzará tantas casillas como puntos haya obtenido.

Para tratar de compensar la diferencia de puntos entre los dados se proponen los siguientes reajustes:

- ✓ El jugador que lanza el dado tetraédrico siempre suma 2 al resultado obtenido en el lanzamiento y avanza con su coche el número de casillas que indica la suma.

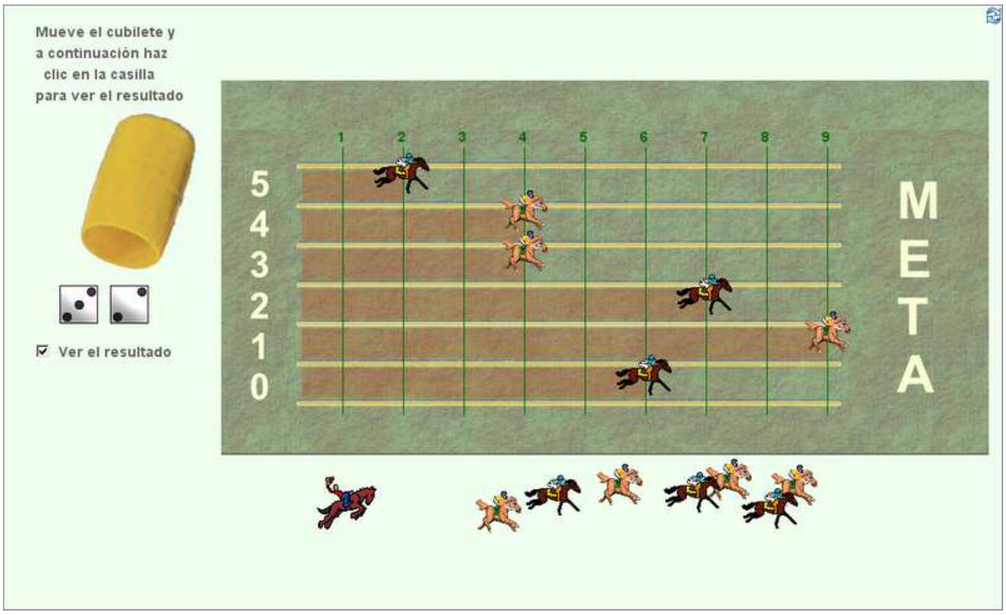
- ✓ El jugador que lanza el dado cúbico avanza con su coche el número de casillas que indica el resultado obtenido al lanzar el dado.
- ✓ El jugador que lanza el dado octaédrico siempre resta 2 al resultado obtenido en el lanzamiento y avanza con su coche el número de casillas que indica la resta, si es positiva, o retrocede, si al restar sale un número negativo. Si el resultado de la resta es 0, el coche permanece en su casilla.

El propósito final de esta actividad es que el análisis de los resultados obtenidos en el juego permita valorar si son justas las reglas del juego y encontrar una justificación a los resultados que se obtienen.

Carreras de caballos

Hay otras cuatro actividades en las que se proponen simulaciones probabilísticas en contextos similares a las anteriores. Se trata de simular carreras de caballos en las que su avance está regido por los resultados obtenidos en el lanzamiento de dos dados, cuyas puntuaciones se suman, en unos casos o se restan, en otros, para determinando qué caballo avanza tras cada tirada.

Tanto para la suma como para la resta, podemos optar por mover manualmente los caballos en una carrera particular, observando el ritmo de avance de cada uno, o bien, mediante una simulación automática, ver rápidamente los resultados que se producirían en un cierto número de carreras.



La apuesta inicial que los jugadores deben hacer antes de cada una de las carreras es un buen indicador del aprendizaje de los conceptos más básicos. La comprensión del comportamiento del azar se irá poniendo de manifiesto a medida que observamos que la apuesta se basa en los resultados que se van obteniendo y no en argumentaciones que parten del supuesto de que todos los caballos tienen las mismas posibilidades de ganar la carrera.

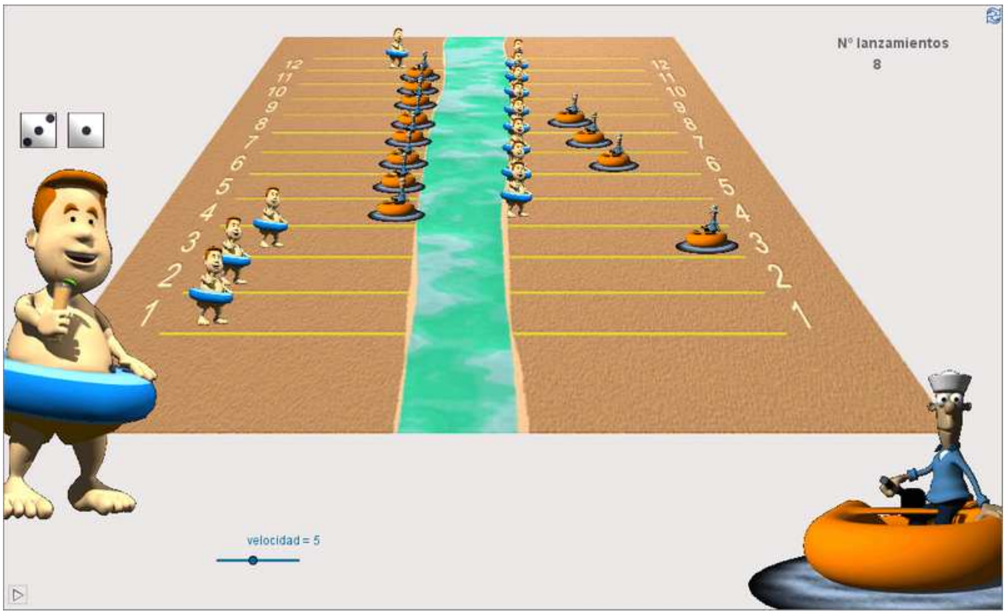
El registro de los resultados del juego permitirá hacer con posterioridad un análisis estadístico de los mismos que facilite llegar a algunas conclusiones relevantes sobre el comportamiento del azar.

Finalmente, el análisis de los resultados teóricos que pueden obtenerse en el lanzamiento de los dados permitirá contrastar los resultados experimentales con los cálculos teóricos.

__Cruzar el río__

Se trata de un juego para 2 jugadores para el que se emplean dos dados y 12 fichas para cada jugador, además del tablero correspondiente. Cada jugador debe elegir una de las orillas del río. Antes de empezar a jugar, es necesario situar las figuras en las casillas correspondientes, que aparecen numeradas del 1 al 12. Se puede colocar más de una figura en una misma casilla y, en consecuencia, también puede haber casillas vacías.

Se van lanzando sucesivamente dos dados. Tras cada lanzamiento se suman los puntos obtenidos. Si un jugador tiene una figura situada en una casilla cuyo número coincida con la suma obtenida, esa figura puede cruzar el río: pasará a la otra orilla. Si en la casilla cuyo número coincide con la suma obtenida hay varias figuras, en cada lanzamiento solamente se podrá pasar una de ellas. Gana el juego el jugador que antes consiga pasar todas sus figuras a la orilla opuesta.



Este juego es un complemento extraordinario al juego de la carrera de caballos, pues en la estrategia que se siga para la colocación de las fichas se ponen de manifiesto de una muy claramente los aprendizajes que se persiguen con las actividades anteriores.

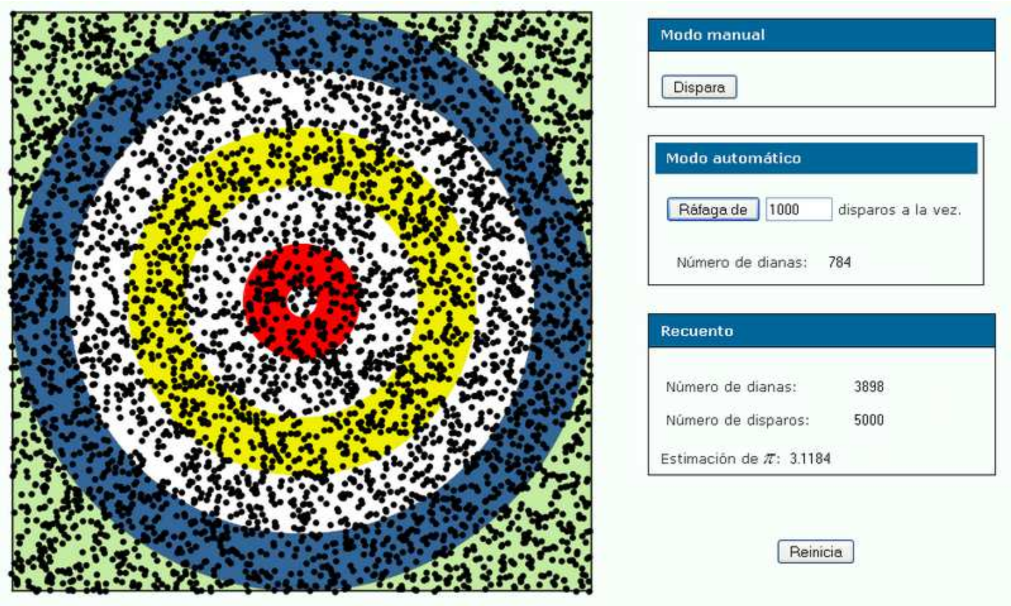
Se ofrece también la posibilidad de que juegue un solo jugador contra la máquina.

El método de Montecarlo

Como es sabido, se trata de un método no determinístico de aproximar expresiones matemáticas complejas y costosas de evaluar con exactitud. En este caso se trata de utilizarlo para encontrar un valor aproximado de π.

Se simulan series de lanzamientos sobre una diana de forma circular, inscrita en un tablero cuadrado: la proporción de disparos sobre la diana con respecto al total de disparos realizados nos permitirá encontrar un valor aproximado de π.

Se puede ver cómo a medida que aumenta el número de disparos que se realizan, mayor es la aproximación entre el valor obtenido experimentalmente y el valor real de π.



El problema de Monty Hall

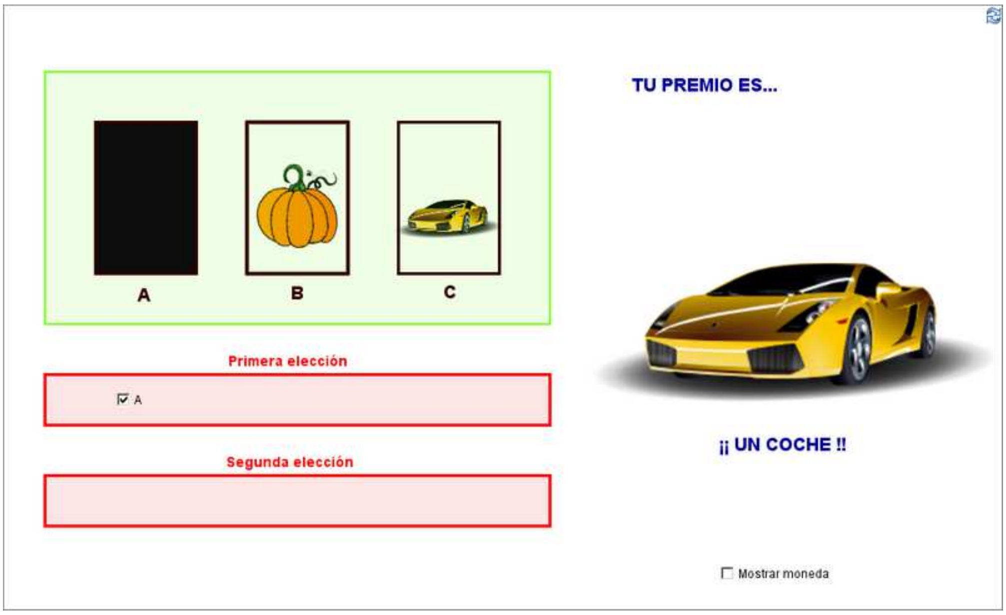
Son varias las actividades del Proyecto Gauss que tienen como objetivo la resolución de algunos problemas clásicos de la probabilidad, en algunos casos a través únicamente de la simulación y en otros añadiendo también el cálculo teórico.

Uno de tales problemas es el que está inspirado en el concurso televisivo estadounidense *Let's Make a Deal* (*Hagamos un trato*) y que es conocido por el nombre del presentador de aquel concurso: Monty Hall. (En España se utilizó el mismo esquema en el concurso televisivo "Un, dos, tres, responda otra vez".)

Básicamente el problema consiste en lo siguiente:

- Al concursante se le ofrece la posibilidad de escoger entre 3 puertas. Tras una de ellas se esconde un coche y tras las otras dos hay regalos sin importancia. (En la versión original esos regalos sin importancia eran cabras, mientras que en la versión española eran calabazas.) El concursante gana el premio que se oculta detrás de la puerta que escoja.
- Después de que el concursante elige una puerta, el presentador abre una de las otras dos puertas, mostrando que detrás de ella había un regalo sin importancia (una calabaza). Siempre puede hacerlo, ya que el presentador conoce lo que hay detrás de cada puerta. Quedan pues dos puertas sin abrir.
- Entonces, el presentador ofrece al concursante la posibilidad de cambiar su elección inicial y escoger la otra puerta que continúa cerrada.

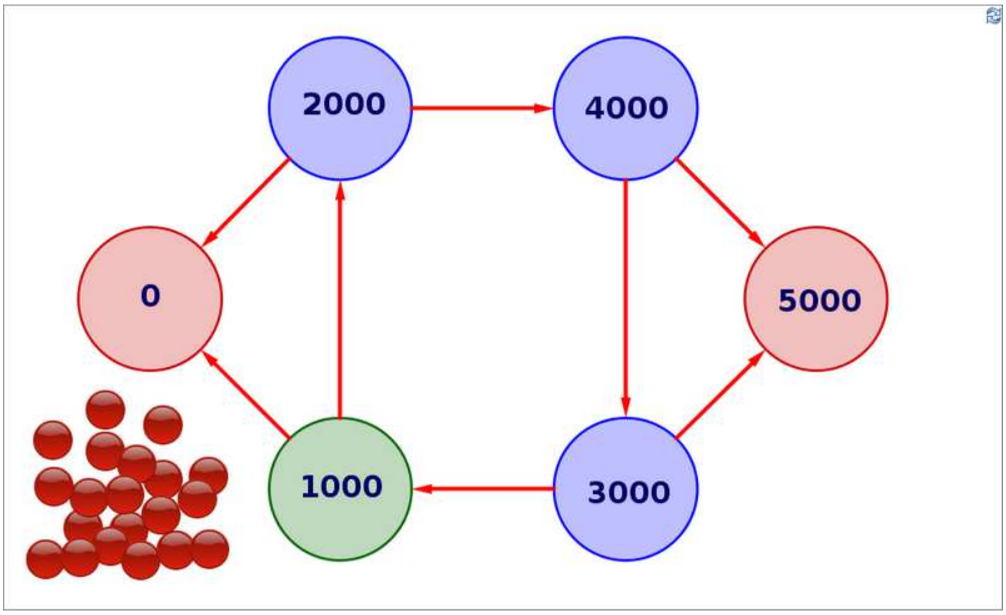
La pregunta es: ¿debería cambiar de puerta?



Esta actividad permite llevar a cabo la simulación. Se trata de determinar, a partir de los resultados obtenidos, si las tres posibles alternativas (mantener siempre la elección inicial, cambiar siempre la elección inicial o elegir al azar si mantenemos la puerta elegida o cambiamos) tienen la misma probabilidad o si las probabilidades son diferentes.

Jugador audaz

El problema que se plantea es el siguiente: una persona tiene 1000 euros y tiene que hacer frente urgentemente a una deuda de 5000 euros. Para conseguirlos participa en un juego de azar, en el que cada vez que juega tiene la misma probabilidad de ganar que de perder. Ha de seguir una estrategia audaz: en cada jugada apuesta una cantidad tal que, en el caso de ganar, se acerque lo más posible a su meta. ¿Cómo debe jugar? ¿Qué probabilidad tiene de obtener los 5000 euros que necesita?



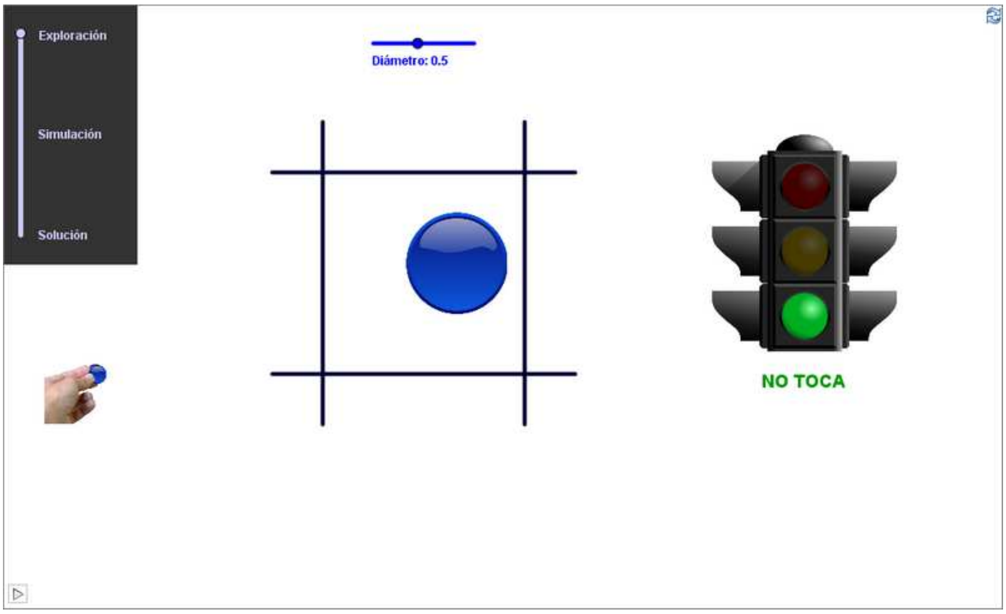
En este caso la simulación se lleva a cabo utilizando fichas sobre un tablero en el que se reflejan los distintos estados del problema: el estado inicial, cuando dispone de 1000 euros, los dos estados finales: 0, si pierde, y 5000, si consigue su objetivo, más los tres resultados intermedios: 2000, 3000 y 4000. La simulación se lleva a cabo introduciendo fichas en el tablero, que en cada uno de los estados intermedios se distribuyen equitativamente según las dos posibilidades que en cada caso se ofrecen, hasta conseguir que no quede ninguna ficha en ninguna de las posiciones intermedias. El número de fichas que finalmente se sitúan en los dos estados finales nos permite obtener la solución del problema.

Fichas sobre una cuadrícula

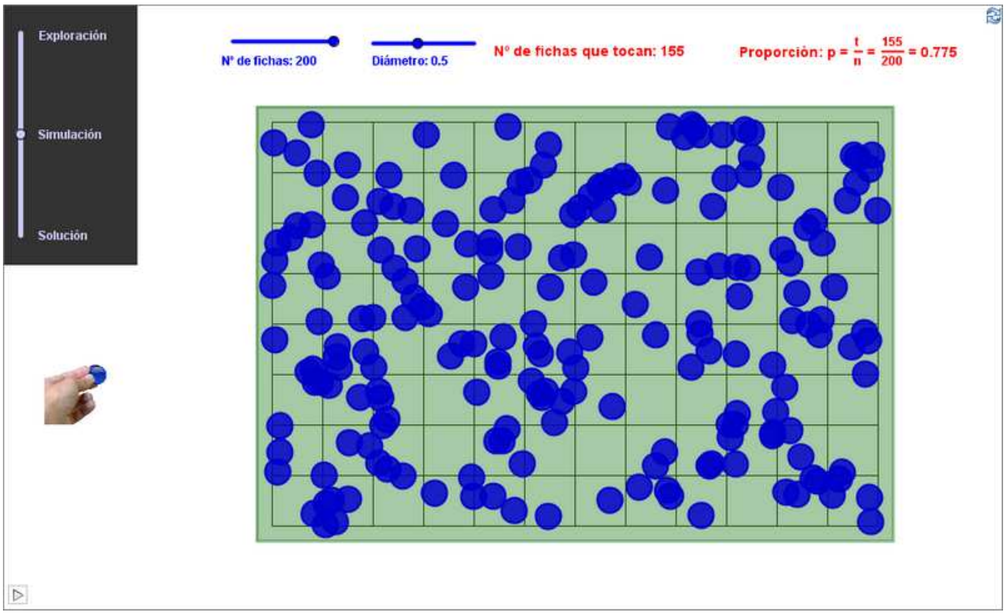
En esta actividad se aborda un problema clásico de probabilidad geométrica: si lanzamos, al azar, una ficha sobre una cuadrícula, ¿qué es más probable, que toque o que no toque alguna de las líneas de la cuadrícula?

El applet ofrece tres escenas que permiten un acercamiento gradual al problema. Además dispone de controles que permiten variar el diámetro de la ficha.

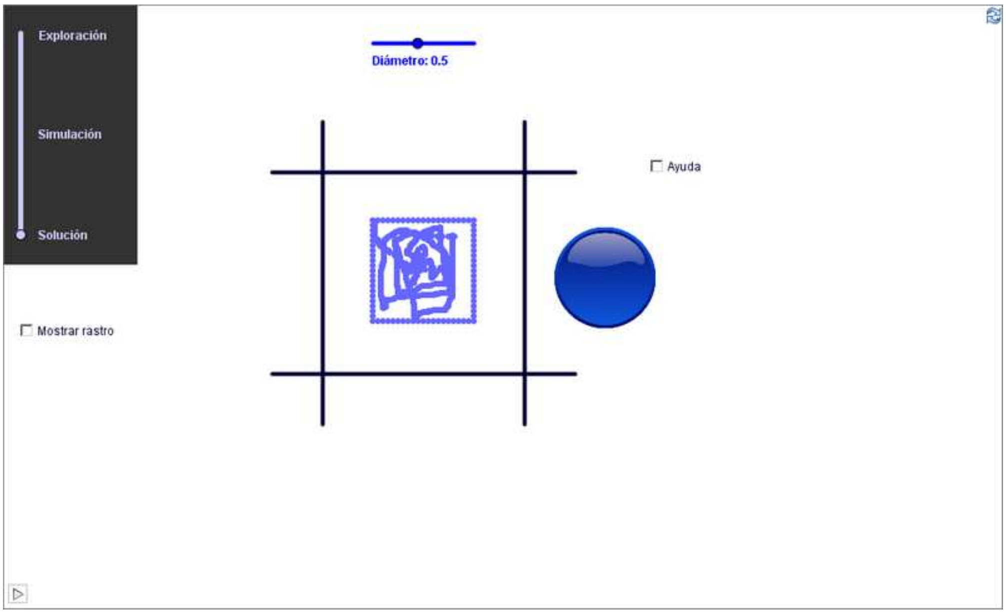
La primera escena permite explorar el problema: ¿es más probable que la ficha toque una de las líneas de la cuadrícula o que no toque ninguna? ¿Cambian esas probabilidades cuando modificamos el diámetro de la ficha? La observación de los resultados, a la que ayuda el semáforo (en rojo cuando la ficha tapa una línea y en verde cuando no lo hace), permite establecer las primeras conjeturas acerca de las preguntas que se plantean.



¿Qué ocurriría si realizáramos un gran número de lanzamientos? La segunda escena nos permite aproximarnos a la respuesta. Manualmente o mediante la animación, podemos ver el resultado de hacer series de 200 lanzamientos cada una. También se muestra la proporción de fichas que tocan alguna de las líneas de la cuadrícula. Modificando el diámetro de la ficha podemos analizar cómo varía esa proporción y establecer las primeras conclusiones.

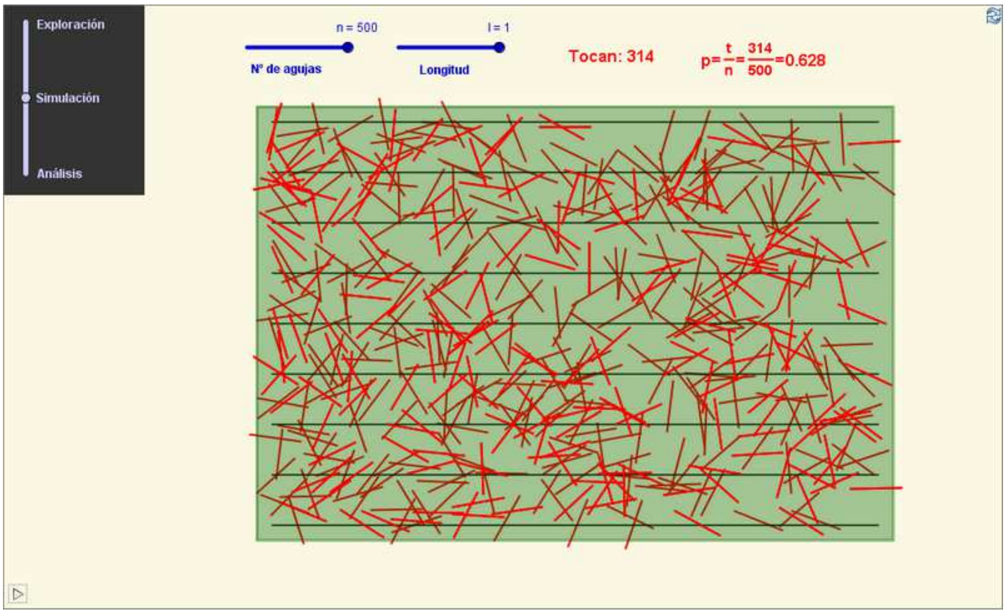


En la tercera escena se analiza la situación desde un punto de vista geométrico y se obtiene la solución del problema. El rastro que deja el centro de la ficha cuando la movemos sobre la cuadrícula nos proporcionará las pistas suficientes que nos permitirán llegar a la probabilidad que buscamos. La relación entre la superficie que sombreamos y el diámetro de la ficha nos llevará a la generalización del resultado obtenido.



La aguja de Buffon

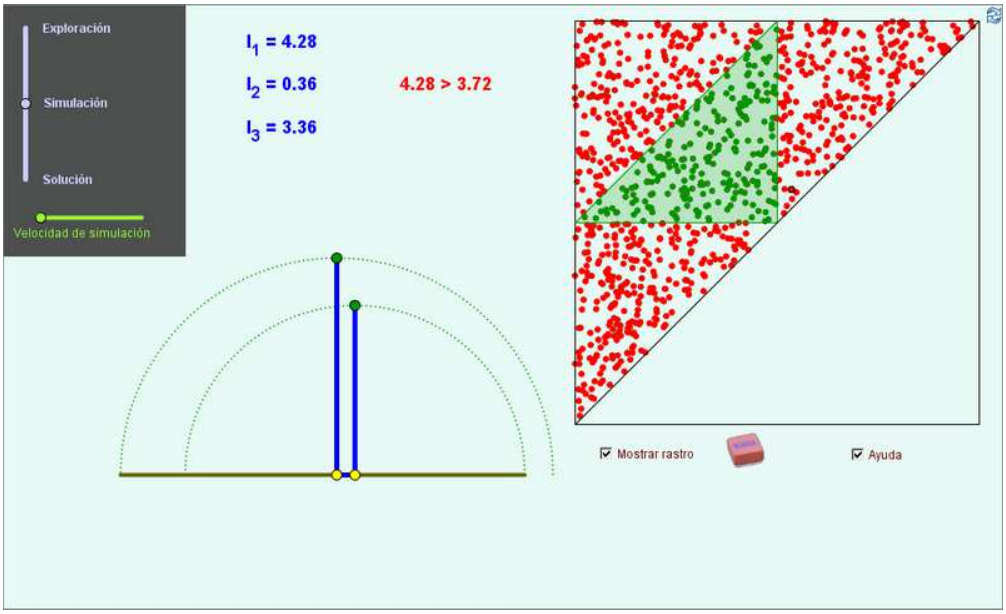
En esta actividad se aborda el problema propuesto por Georges Louis Leclerc (1708-1788), Conde de Buffon, que básicamente consiste en lo siguiente: si lanzamos una aguja de longitud l sobre un papel plano sobre el que hay trazadas rayas rectas paralelas separadas entre sí una cierta distancia d, ¿cuál es la probabilidad de que la aguja toque alguna de las rayas del papel?



El applet también consta de tres escenas que permiten un acercamiento gradual al problema. Los controles en esta ocasión permiten variar la longitud de la aguja.

Un triángulo… probablemente

El problema que ahora se plantea es el siguiente: dado un segmento cualquiera lo dividimos, al azar, en tres trozos; ahora tratamos de construir un triángulo con los tres segmentos en que ha quedado dividido el segmento dado pero... no siempre lo conseguimos. ¿Cuál es la probabilidad de que podamos construir un triángulo con los tres segmentos resultantes de cortar en tres partes, al azar, un segmento dado?



Como en los problemas anteriores, el applet también consta de tres escenas que permiten un acercamiento gradual al problema. En este problema resulta muy eficaz la utilización del color dinámico en el proceso de simulación.

Notas

[1] National Council of Teachers of Mathematics: "Principios y Estándares para la Educación Matemática", SAEM THALES, 2003.

[2] El Proyecto Gauss constituye una de las acciones del Programa Escuela 2.0 que ha puesto en marcha el Ministerio de Educación. Está integrado en la web del Instituto de Tecnologías Educativas (ITE) y se accede a través de la dirección http://recursostic.educacion.es/gauss.

[3] **Gapminder** es una organización sin ánimo de lucro que tiene como finalidad la promoción del desarrollo sostenible a nivel mundial y el logro de los Objetivos de Desarrollo del Milenio de las Naciones Unidas (http://www.gapminder.org/).

Referencias bibliográficas

ALVAREZ, J.L. y GONZÁLEZ, A.E. (1992): *Estadística y azar en la Enseñanza Secundaria Obligatoria*, Avilés, CEP de Avilés.

ÁLVAREZ, J.L. (2010): "Estadística y probabilidad: una propuesta de tratamiento orientada al desarrollo de las competencias básicas" en *Competencias matemáticas. Instrumento para las Ciencias sociales y naturales*. Madrid, IFIE (Colección: Aulas de verano).

ENGEL, A. (1988): *Probabilidad y Estadística 1*, Valencia, Mestral libros.

ENGEL, A. (1988): *Probabilidad y Estadística 2*, Valencia, Mestral libros.

LOSADA, R (2007): "GeoGebra: La eficiencia de la intuición" en *Gaceta de la RSME* vol. 10.2, pp. 223-239.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (2003): *Principios y Estándares para la Educación Matemática*, Sevilla, SAEM Thales.