Especialización en Docencia Matemática

GeoGebra I: Geometría con GeoGebra

OEI CAEU
iberciencia
JUNTA DE ANDALUCIA
CONSEJERÍA DE ECONOMÍA, INNOVACIÓN, CIENCIA Y EMPLEO

GeoGebra I
Geometría con GeoGebra

Contenido de este documento:
Introducción º.

Introducción a GeoGebra

Cada vez es mayor la oferta de programas disponibles para utilizar en el aula cuando se desea incorporar las TIC, por lo que no es necesario recurrir a programas comerciales con el consiguiente costo, ya que se podrán encontrar alternativas a estos programas a través de las opciones que ofrece el software libre.

Así, para desarrollar los contenidos de geometría podremos encontrar en Internet, distintos programas como *Regla y Compás*, *Dr. Geo* o *Kig,* y por supuesto *GeoGebra*.

Aunque básicamente, todos estos programas de geometría dinámica tienen características comunes, no todos son iguales, sobre todo si consideramos las características que ofrecen.

Con todos estos programas se trabaja de manera análoga ya que a partir de unos objetos elementales (puntos, segmentos, rectas, circunferencias, etc.) realizaremos distintas construcciones, estableciendo relaciones afines y métricas entre los objetos que intervienen; de manera que al mover cualquier objeto elemental se mantengan las relaciones existentes entre los objetos de la construcción.

Es evidente que para que se mantengan las relaciones es necesario que los objetos estén relacionados a partir de propiedades geométricas y no a partir de trazados a mano alzada como expondremos en los distintos ejemplos que acompañarán a la exposición de este tipo de recursos.

Este es el principio fundamental a tener en cuenta sobre el significado de geometría dinámica.

GeoGebra como recurso TIC

GeoGebra no es sólo un programa de geometría dinámica ya que ofrece una amplia variedad de opciones para desarrollar otros bloques de contenidos.

Además, añade una característica importante, su descarga se realiza de manera gratuita en www.*geogebra*.org, desde la que se ofrecen las posibilidades para su uso en distintos sistemas operativos.

GeoGebra es un programa sencillo y fácil de utilizar, lo que permitirá, que desde el primer instante, sea posible realizar construcciones y afrontar la resolución de problemas a través de las herramientas y opciones que ofrece.

Este programa está en continuo desarrollo, lo que hace que cada vez que se presenta una nueva versión, aparezcan nuevas herramientas y por tanto su potencia aumenta. Sin embargo, GeoGebra se puede adaptar a cualquier nivel educativo, lo cual lo convierte en un recurso indispensable para todo el profesor que quiera incorporar las TIC a su trabajo diario.

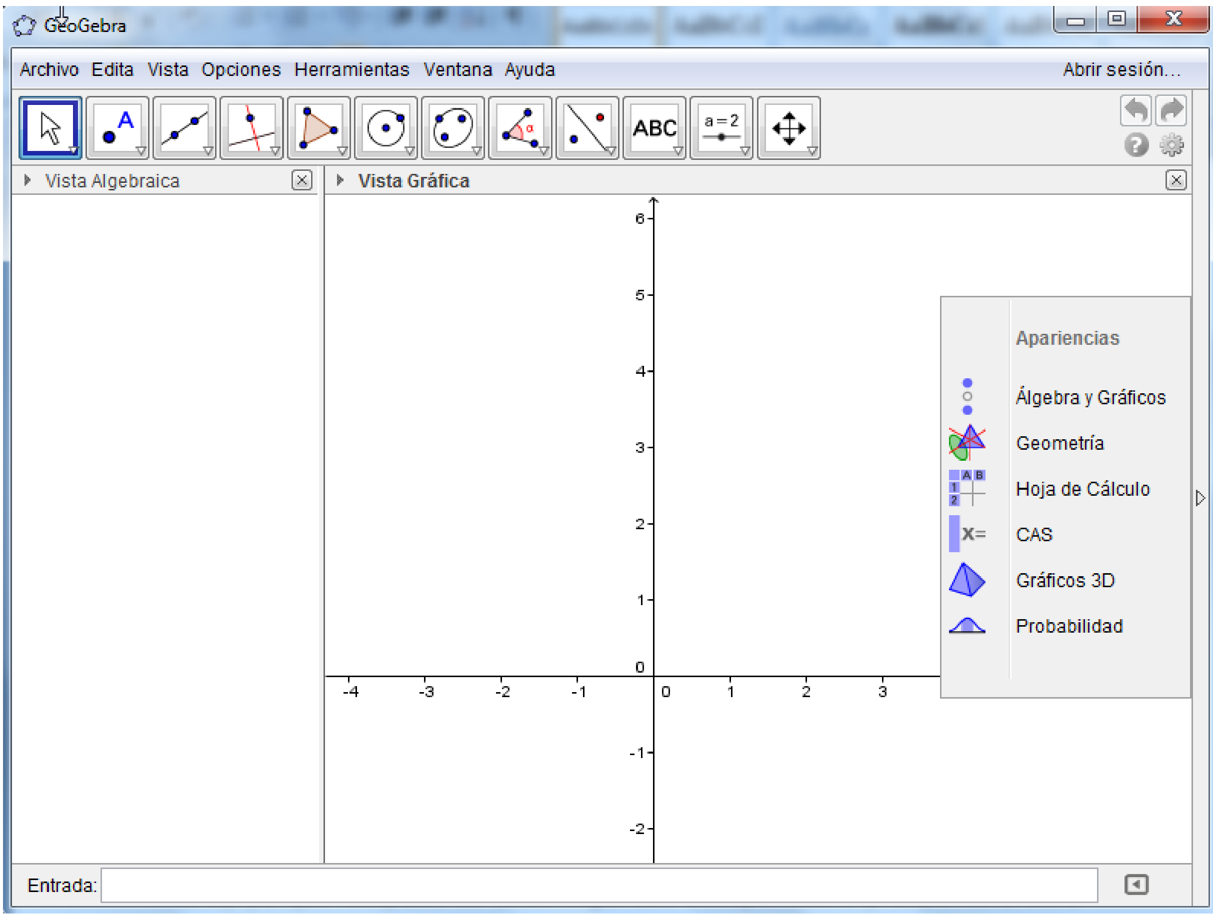
GeoGebra, se inició en el 2001 en el curso de la tesis de maestría de Markus Hohenwarter y avanzó hacia la tesis de doctorado en Educación Matemática en la Universidad de Salzburgo (Austria). Actualmente, *GeoGebra* continúa su desarrollo en varias Universidades, siendo sus desarrolladores Markus Hohenwarter, Michael Borcherds e Yves Kreis, contando con contribuciones de una gran cantidad de países.

La utilización de GeoGebra permitirá abordar la geometría y otros aspectos de las matemáticas, a través de la experimentación y la manipulación de distintos elementos, facilitando la realización de construcciones para deducir resultados y propiedades a partir de la observación directa.

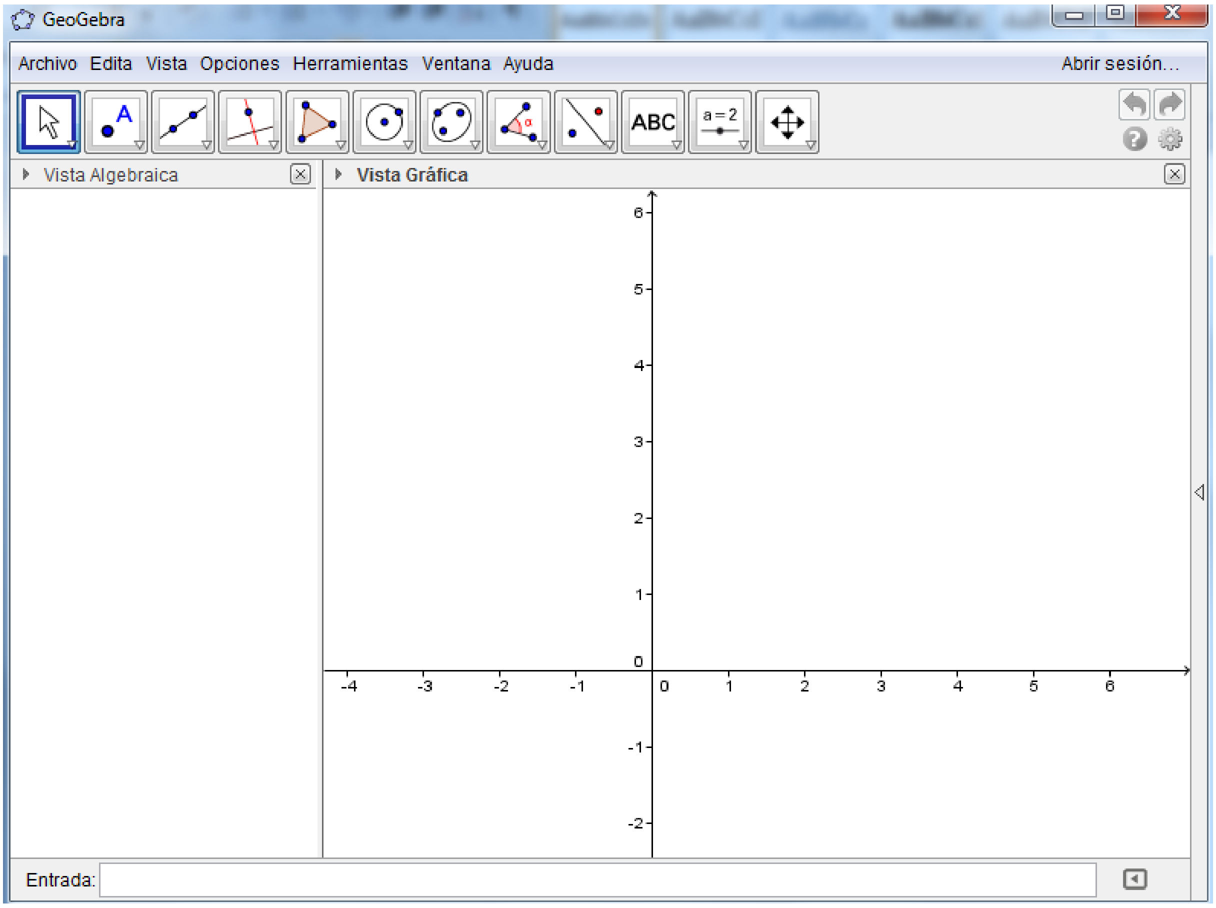
En este primer bloque el objetivo será familiarizar al usuario con la forma de trabajo de GeoGebra; no pretendemos que el usuario maneje *GeoGebra* a la perfección sino que lo conozca y valore las posibilidades que ofrece como recurso para su utilización en el aula.

Por tanto, comencemos a dar los primeros pasos realizando algunas construcciones con *GeoGebra*.

Una vez descargado e instalado el programa, aparecerá una pantalla similar a la siguiente:



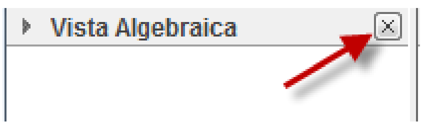
Observamos que aparece un cuadro para seleccionar la opción de trabajo. Por ahora, nos despreocupamos de este menú, ya que después de unos segundos desaparecerá y la pantalla será similar a la siguiente:



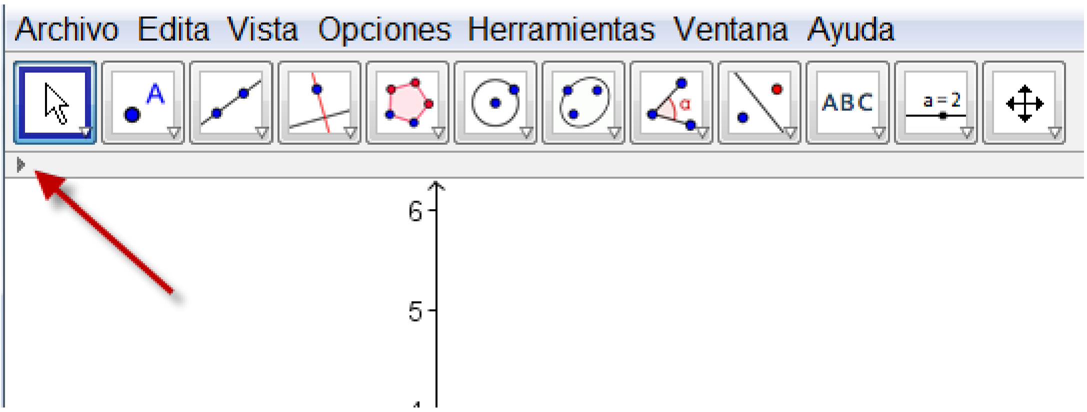
Lo que menos nos preocupa es conocer, por ahora, cada una las partes que aparecen ya que las expondremos más adelante.

Por ahora, para crear las primeras construcciones realizaremos las acciones siguientes:

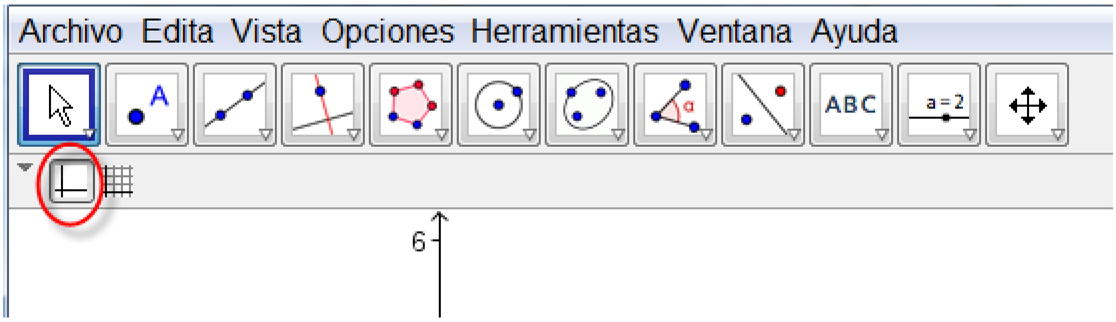
1º. Ocultaremos la parte izquierda denominada **Vista algebraica**. Para ello, haremos clic en .



2º. Ocultaremos los ejes que aparecen en la parte derecha, denominada **Vista gráfica**. Para ello, desplegamos, si no lo está, la barra de opciones que aparece en la parte superior de la vista gráfica.



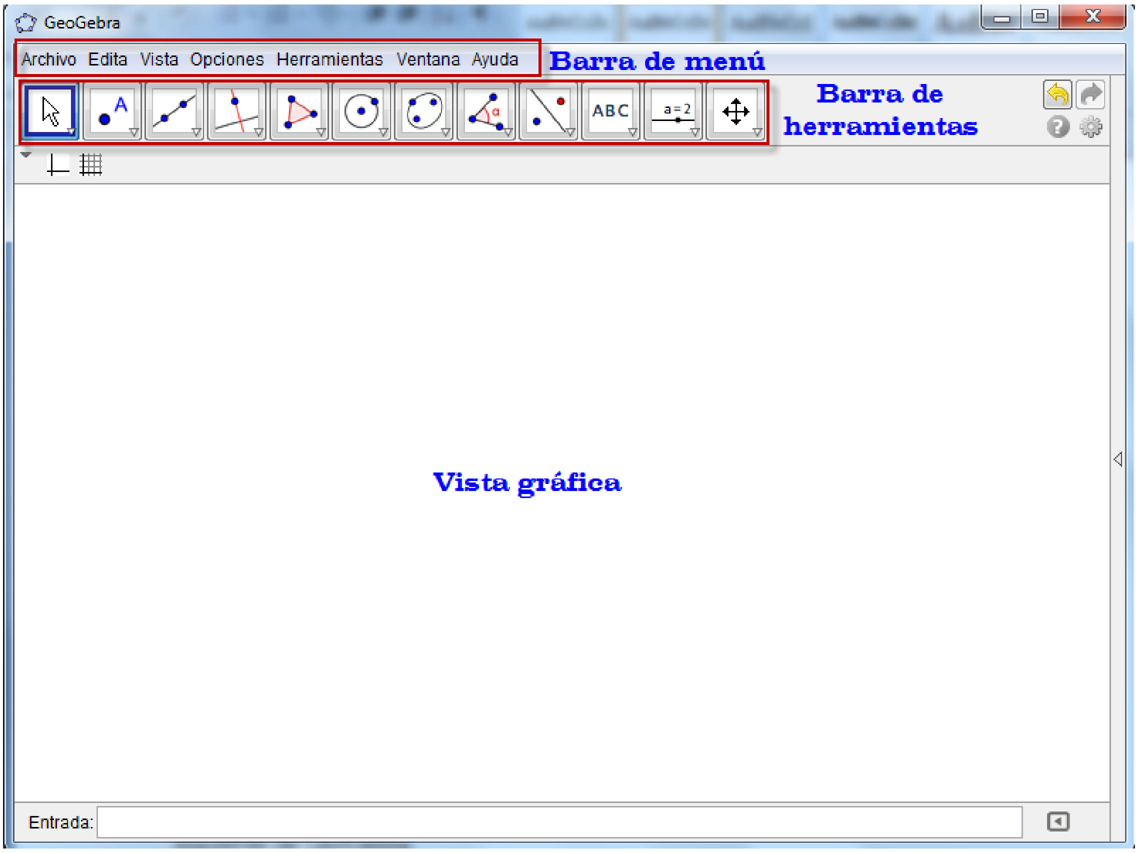
Pulsamos sobre el icono de los ejes que aparece indicado en la imagen siguiente:



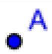
Y los **Ejes** se ocultarán.

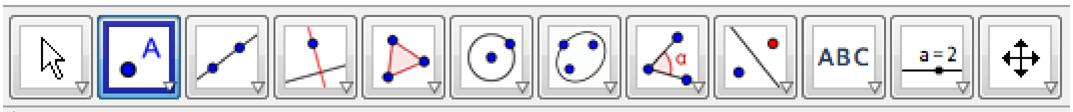
De esta forma, nos hemos quedado con la vista gráfica en la que podemos situar los primeros objetos para comenzar las construcciones con GeoGebra.

Aunque más adelante describiremos con detalle, observamos que disponemos de una barra de menú y una barra de herramientas, similares a las que encontramos en otros programas.



Es evidente que el objeto más sencillo que podemos crear en el plano es un punto.

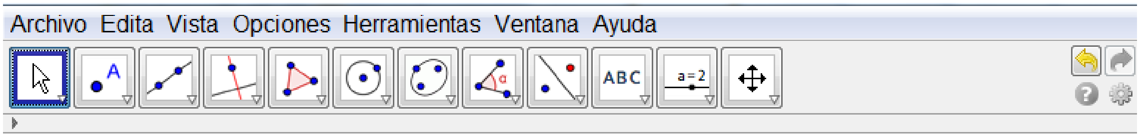
Para ello, seleccionamos la herramienta **Punto** cuyo icono de representación es 

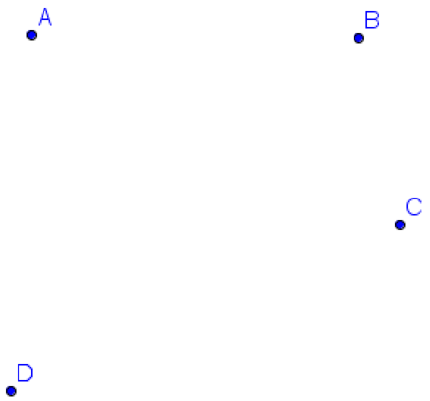


Una vez seleccionada, observamos que aparece enmarcada en un cuadro de color azul.

Con esta herramienta podemos comenzar a crear puntos en la vista gráfica. Para ello, bastará con hacer clic con el botón izquierdo en cualquier parte de esta vista gráfica.

Por ejemplo, vamos a crear cuatro puntos que aparecerán nombrados como A, B, C y D.

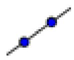




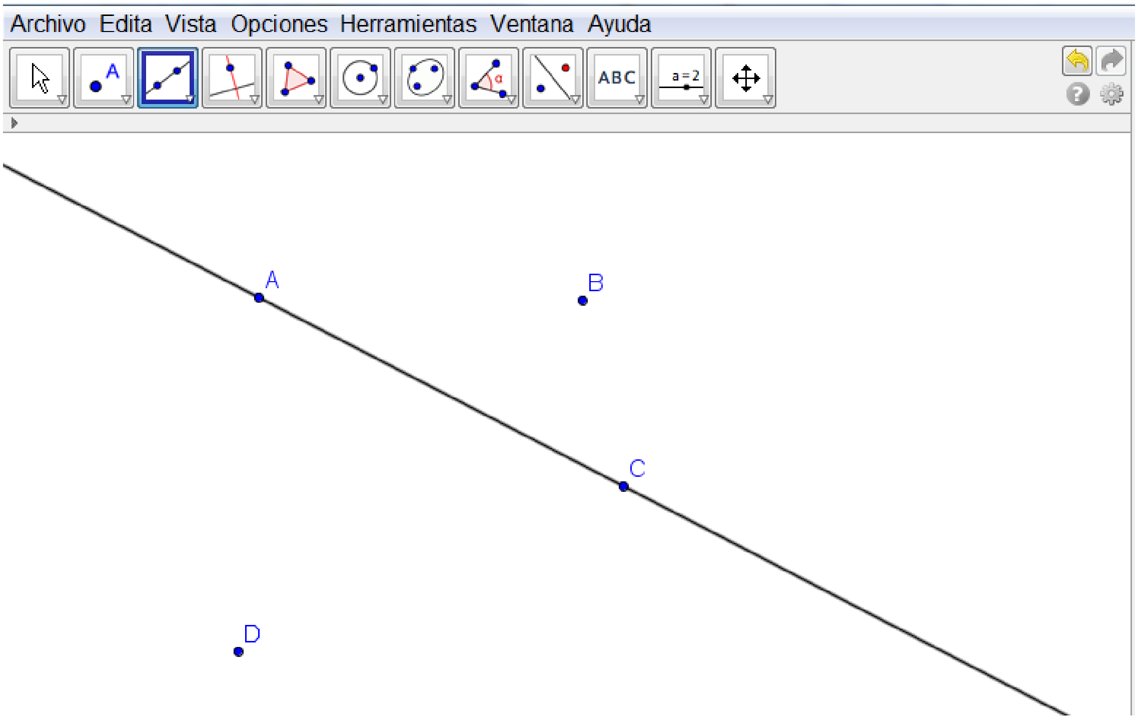
Pensemos qué podemos construir con dos puntos.

Por ejemplo, podemos dibujar una recta, la que pasa por A y C.

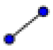
Para dibujarla disponemos de la herramienta correspondiente, que podemos observar se encuentra justo a la derecha de la herramienta **Punto** ya conocida.

La herramienta **Recta** está representada por el icono  .

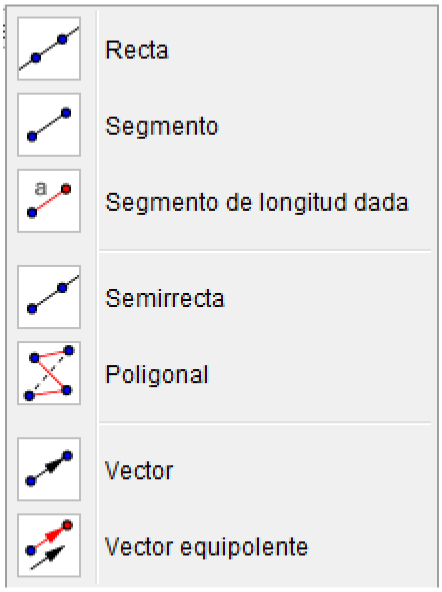
Una vez seleccionada esta herramienta, bastará con acercarnos al punto A, haciendo clic sobre él, desplazando el ratón (sin mantener pulsado el botón izquierdo) hasta el segundo punto B, volviendo a hacer clic para que la recta que pasa por A y B aparezca creada en la vista gráfica.



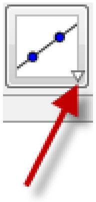
También, con dos puntos es posible crear un segmento cuyos extremos sean esos dos puntos.

Vamos a dibujar el segmento BD, siguiendo un proceso similar al anterior, aunque para ello, necesitamos seleccionar la herramienta **Segmento**, representada por  .

Esta herramienta se encuentra en el mismo bloque de herramientas que la herramienta **Recta**, utilizada anteriormente.



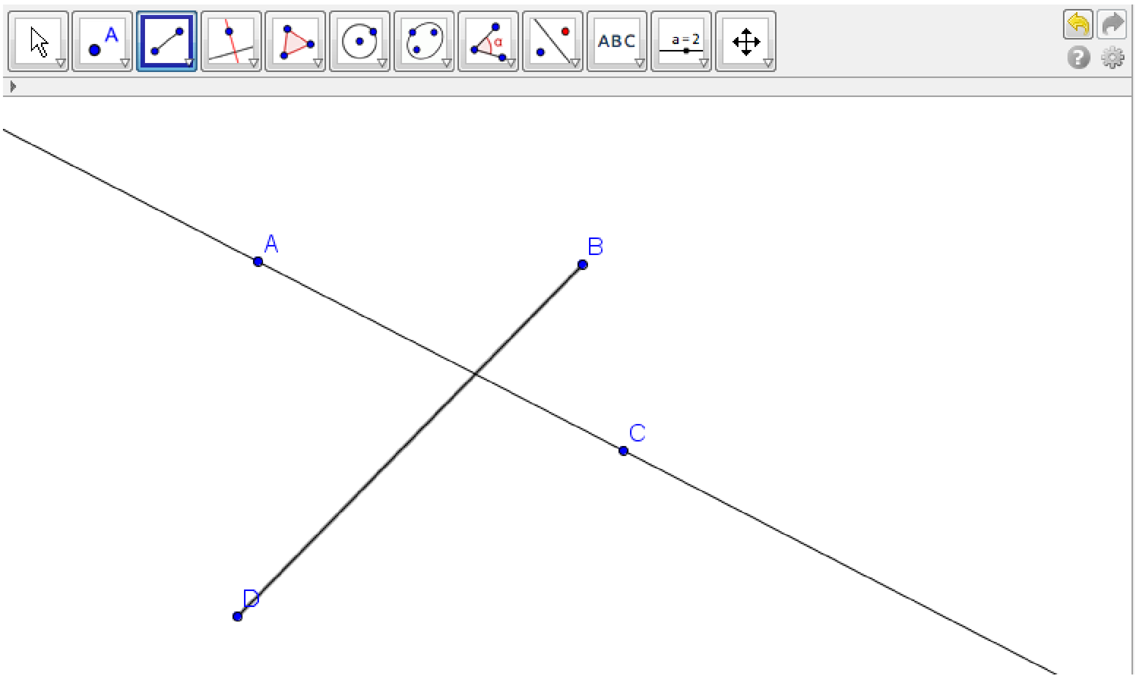
Para abrir este menú de herramientas bastará pulsar sobre la punta de flecha que observamos en la herramienta que aparece en la parte superior.



En cada una de las herramientas que aparecen en la barra, al pulsar sobre la correspondiente flecha, aparecerá el bloque con todas las opciones disponibles.

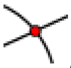
Una vez seleccionada la herramienta **Segmento**, haremos clic con el botón izquierdo del ratón en el punto B y a continuación clic en el punto D.

Aparecerá el segmento BD tal y como aparece en la imagen siguiente:



Un aspecto a tener en cuenta será que no es necesario mantener pulsado el botón izquierdo del ratón. Hay que hacer clic en un punto, desplazando el puntero para llegar al segundo punto.

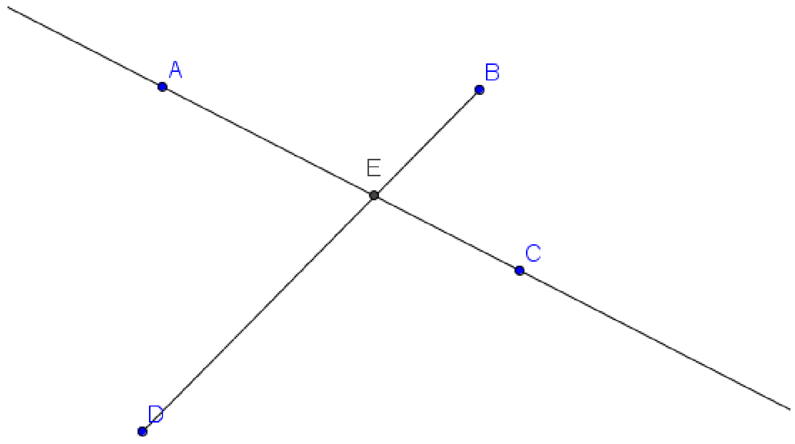
Por tanto, podemos establecer que el proceso para crear un objeto será elegir la herramienta adecuada, haciendo clic con el botón izquierdo en la vista gráfica.

Observamos que la recta y el segmento tienen un punto de intersección que podemos obtener con la herramienta **Intersección** cuyo icono es , que aparecerá al abrir el bloque de herramientas de **Puntos**.

Una vez seleccionada esta herramienta, haremos clic en cada uno de los dos objetos de los que deseamos obtener su intersección, es decir clic sobre el segmento y clic sobre la recta, sin olvidar que el clic lo debemos hacer con el botón izquierdo del ratón.

Observemos que al hacer clic sobre un objeto, aparecerá resaltado; lo cual significa que ese objeto está seleccionado.

Al realizar el proceso anterior aparecerá el punto E, resultado de la intersección de la recta AC y del segmento BD.



Si somos observadores, podemos preguntarnos la razón por la que los puntos A, B, C y D aparecen de color azul y el punto E aparece de color negro.

Hay una razón importante que descubriremos a continuación.

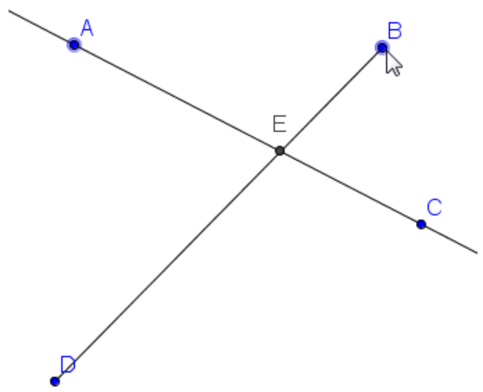
Antes, vamos a exponer cómo mover los objetos que intervienen en una construcción.

Para mover cualquier objeto hay que tener seleccionada previamente la herramienta **Elige y mueve**  (puntero).

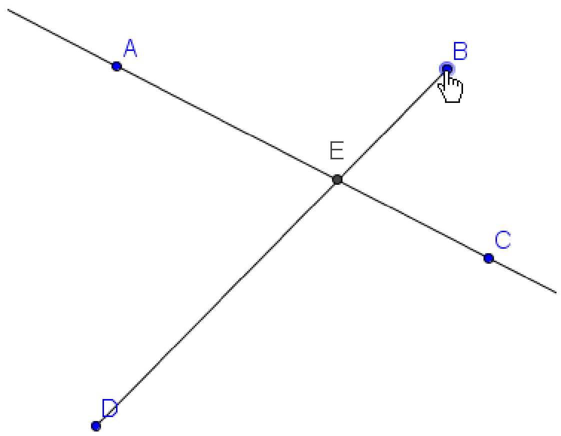
Para seleccionarla bastará con pulsar sobre ella o pulsar la tecla **Esc**.

Una vez seleccionada la herramienta **Elige y mueve**, nos acercamos al objeto que deseamos mover; por ejemplo al punto B.

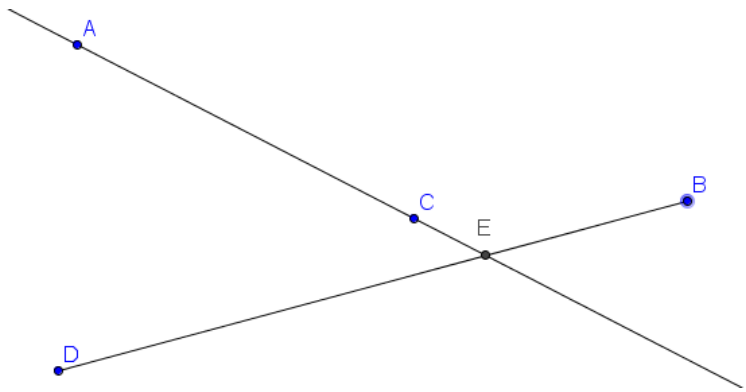
Al acercar el puntero al punto B aparecerá resaltado como podemos vez en esta imagen:



Si mantenemos pulsado el botón izquierdo del ratón, comprobaremos que el puntero cambia de forma, apareciendo una mano que ha agarrado al punto.

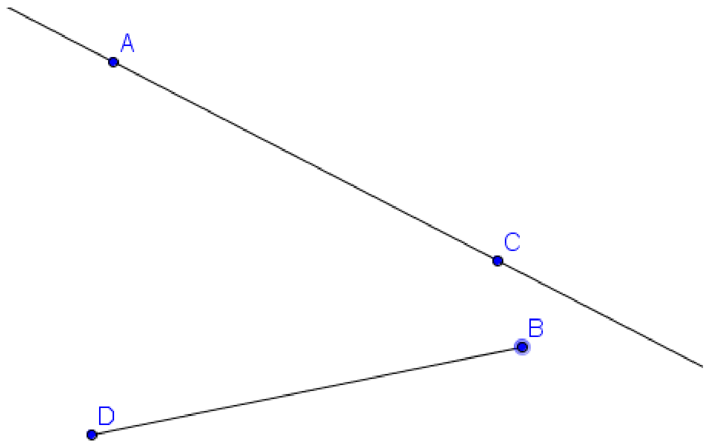


Manteniendo pulsado el botón izquierdo del ratón, podemos desplazar el punto para llevarlo a una nueva posición en la que quedará al soltar el botón del ratón.



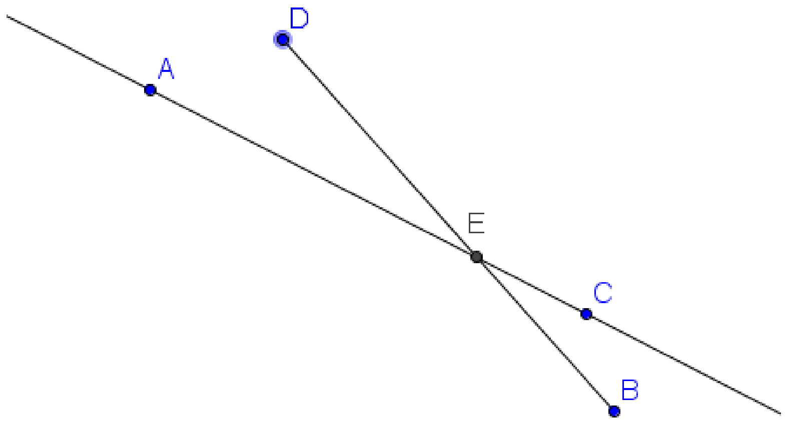
Repetimos el proceso para mover el punto B de manera que el segmento no corte a la recta.

En este caso, tendremos la imagen siguiente:



Al no existir intersección entre los dos objetos, el punto E ha desaparecido, lo cual es evidente.

Peor ¿se ha perdido o borrado de manera permanente? La respuesta es no, ya que volverá a aparecer cuando de nuevo exista intersección entre recta y segmento, como podremos comprobar moviendo de nuevo cualquiera de los objetos que intervienen en la construcción



.

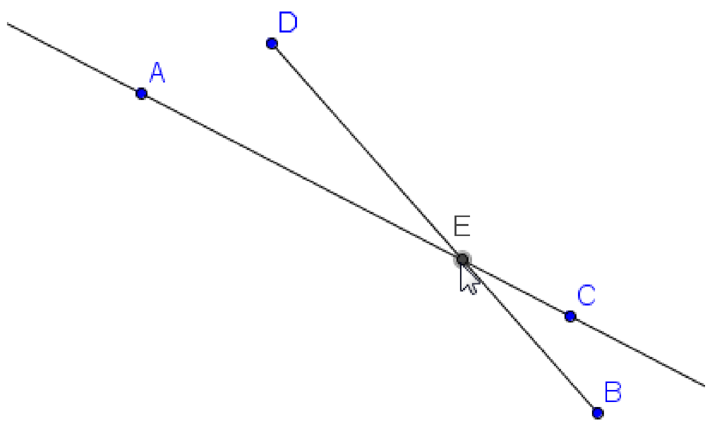
Lo que acaba de ocurrir con la desaparición y posterior aparición del punto E, no es ni más ni menos que el significado del término geometría dinámica.

Entre la recta y el segmento se ha establecido una relación de intersección (el punto E) por lo que al mover los objetos esta relación se mantiene.

En un programa de geometría dinámica, como es el caso de GeoGebra, entre los objetos de una construcción se establecerán relaciones, que si están bien definidas, se mantendrán al mover los objetos.

Volvamos a la diferencia de color entre los primeros puntos y el punto E. Para ello, intentemos desplazar el punto E, siguiendo el proceso ya conocido para mover objetos.

¿Qué ocurre? ¿Cuál es la razón por la que no aparece la mano para agarrar el punto E al mantener pulsado el botón izquierdo del ratón sobre este punto, a pesar de aparecer seleccionado?



La razón tiene que ver con otro concepto importante en estos programas, como son los conceptos de objetos libres y dependientes.

Al crear los primeros puntos (A, B, C y D), una vez seleccionada la herramienta **Punto** hemos pulsado en cualquier parte libre del plano, por lo que no hay ninguna relación entre ellos. Son por tanto, puntos libres o mejor dicho, objetos libres.

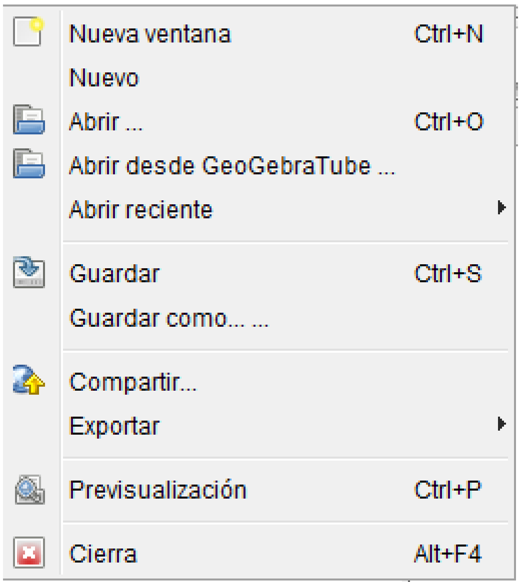
Sin embargo, el punto E se ha creado como intersección de dos objetos (recta AC y segmento BD), por lo que es un punto (u objeto) dependiente de ellos; lo cual supone, como ya hemos comprobado, que siempre que exista intersección el punto aparecerá.

Por tanto, los objetos libres se podrán mover, mientras que los objetos dependientes se moverán cuando se muevan los objetos de los que dependen.

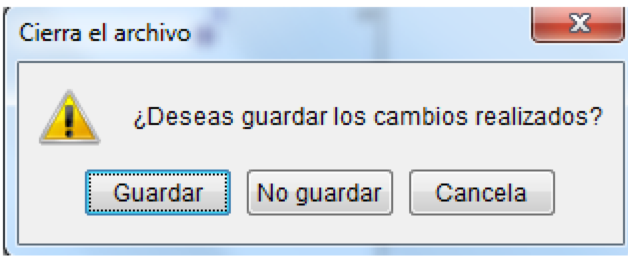
Estas dos ideas son muy importantes para conocer la forma de trabajo de GeoGebra para evitar errores en las construcciones.

Continuaremos con nuevos ejemplos de construcciones sencillos que ayuden a comprender algunos conceptos de GeoGebra.

Para ello, preparamos una hoja nueva en blanco, pulsando sobre la opción **Nuevo** en el menú **Archivo**.



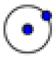
Aparecerá un mensaje para preguntarnos si deseamos guardar o no el archivo actual.



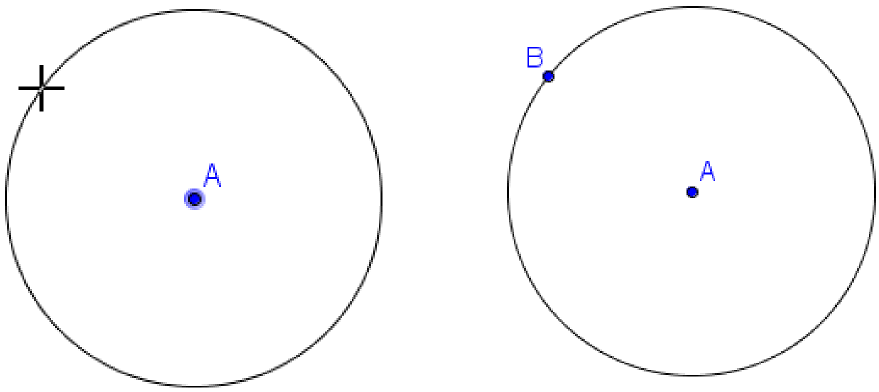
Si deseamos guardar la construcción aparecerá un cuadro de diálogo similar a otros programas conocidos, para indicar dónde guardarlo y para asignarle el nombre con el que se almacenará. Los archivos creados con GeoGebra tendrán la extensión **ggb** que el programa le asigna de manera automática.

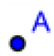
Dibujamos ahora dos puntos A y B en la hoja de trabajo nueva.

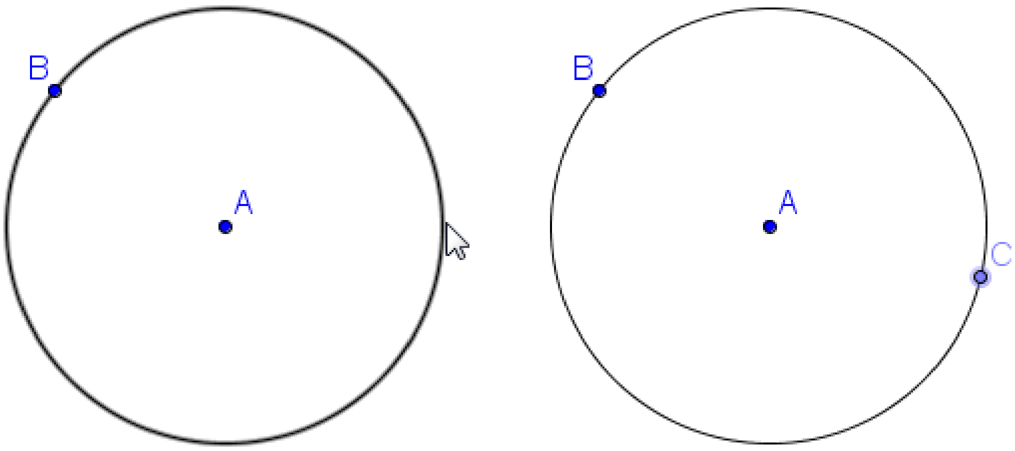
Con dos puntos también se puede construir una circunferencia, de manera que el primer punto sea el centro y el segundo, uno de sus puntos con el que queda determinado el radio.

Para dibujarla, seleccionamos la herramienta **Circunferencia (centro, punto)** .

El proceso es similar al realizado anteriormente al crear la recta o el segmento, haciendo clic en cualquier lugar aparecerá el primer punto que corresponde al centro; al desplazar el ratón aparecerá la circunferencia cuyo tamaño queda fijado al hacer clic para crear el segundo punto.



Creemos un nuevo punto C en la circunferencia. Ya conocemos el proceso, bastará con seleccionar la herramienta **Punto** , acercando el puntero a la circunferencia, de manera que cuando aparezca resaltada (estará seleccionada) y por tanto, al hacer clic con el botón izquierdo del ratón, aparecerá el nuevo punto.



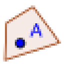
En nuevo punto aparece representado de color azul, pero con un tono más tenue que A y B.

Para entender estas diferencias, arrastremos el punto B y después, hagamos lo mismo con el punto C.

¿Qué ha ocurrido?

Al mover el punto B la circunferencia cambia su tamaño, lo cual es evidente ya que B nos sirvió para crear la circunferencia, siendo el punto que fijaba el tamaño del radio. Por tanto, al cambiar la posición de B que es un punto libre, variará el radio y la circunferencia tendrá otro tamaño.

Sin embargo, al intentar mover el punto C comprobaremos que solamente se mueve por la circunferencia. Por tanto, no es un punto libre, es un punto dependiente pero de otro objeto como es la circunferencia. Esa es la razón por la que aparece representado con otro color.

La creación del punto C también se podría haber realizado utilizando la herramienta **Punto en objeto** , disponible en el mismo bloque de la herramienta anterior.

Ejemplo 1

A partir de una circunferencia de centro A, traza el diámetro que pasa por un punto P de la circunferencia.

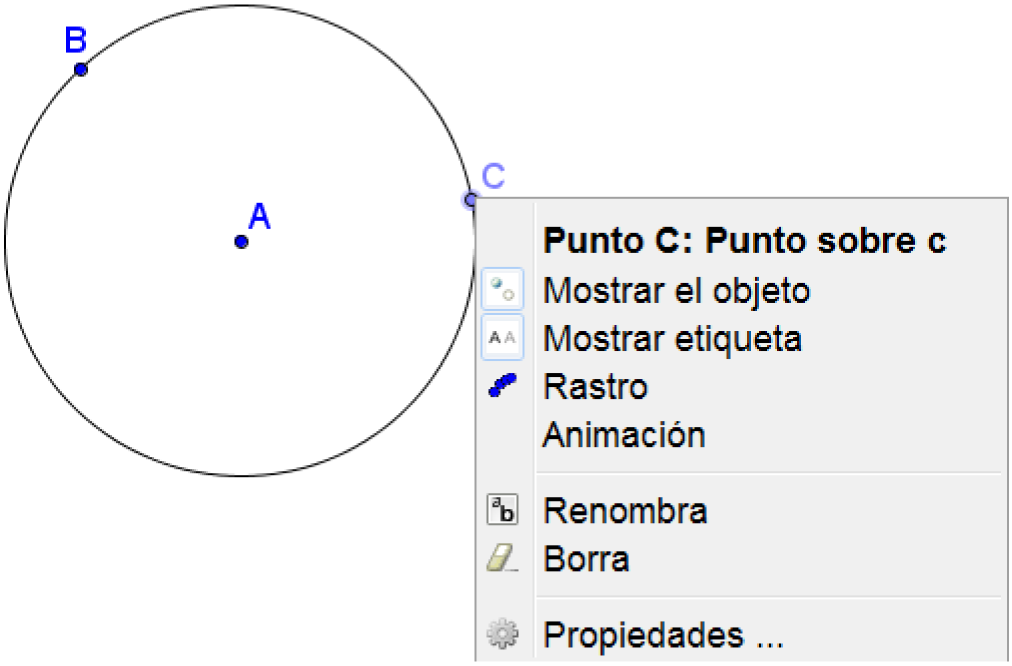
Comenzamos dibujando la circunferencia de centro A, siendo B el punto que determina su radio y por tanto su tamaño.

A continuación dibujamos un nuevo punto en la circunferencia al que llamaremos P.

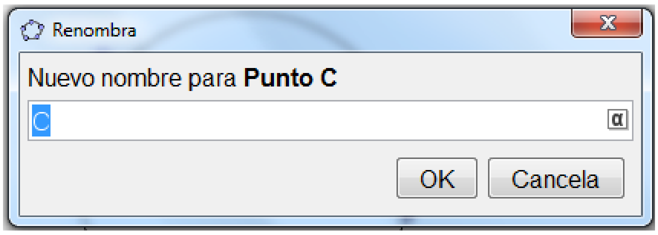
Como hemos indicado anteriormente, este nuevo punto aparece con el nombre C, por lo que podemos renombrarlo.

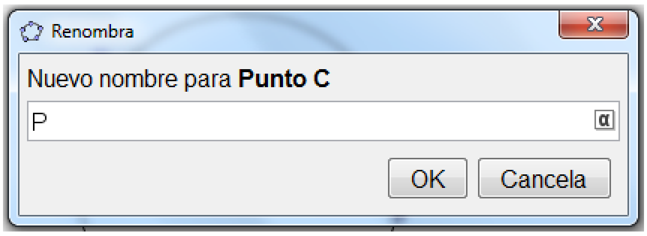
Para renombrar un objeto, seleccionamos la herramienta **Puntero**, acercándonos hasta el objeto que deseamos cambiar, de manera que aparezca resaltado.

Al pulsar el botón derecho del ratón, aparecerá un menú desplegable con distintas opciones.

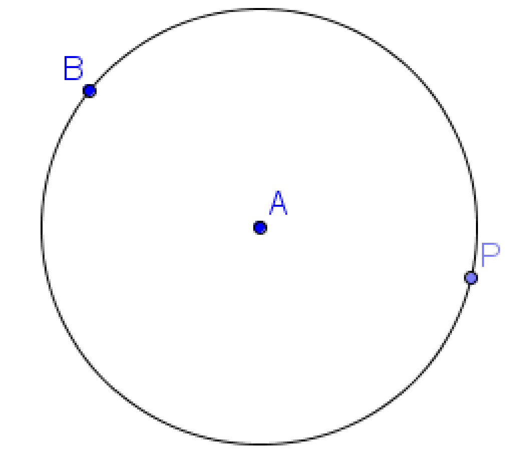


Pulsamos la opción **Renombra**. Aparece el cuadro de diálogo siguiente para cambiar el nombre C por P.



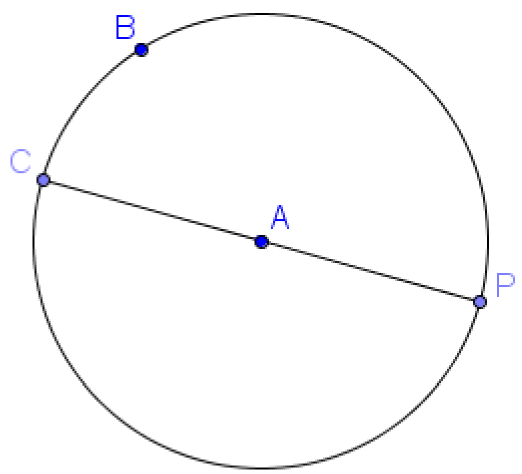


Al pulsar el botón **OK**, el punto cambiará de nombre.



Como el diámetro es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia, podemos elegir la herramienta **Segmento** ya conocida, para dibujar un segmento en el que P sea un extremo, que pase por el centro y cuyo otro extremo sea otro punto de la circunferencia.

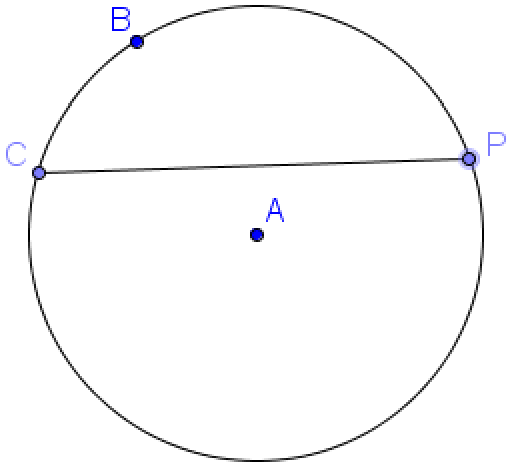
Tendríamos una imagen parecida a la siguiente:



Cuando realicemos una construcción podemos conocer si es correcta o no, moviendo los objetos iniciales. Si las relaciones se mantienen, la construcción será correcta.

Lo comprobamos moviendo los puntos A, B o P, para comprobar si el segmento trazado sigue siendo un diámetro.

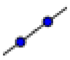
Por ejemplo, al mover P podemos comprobar que algo ha fallado en la construcción ya que el segmento deja de pasar por el centro. Por tanto, no es un diámetro.

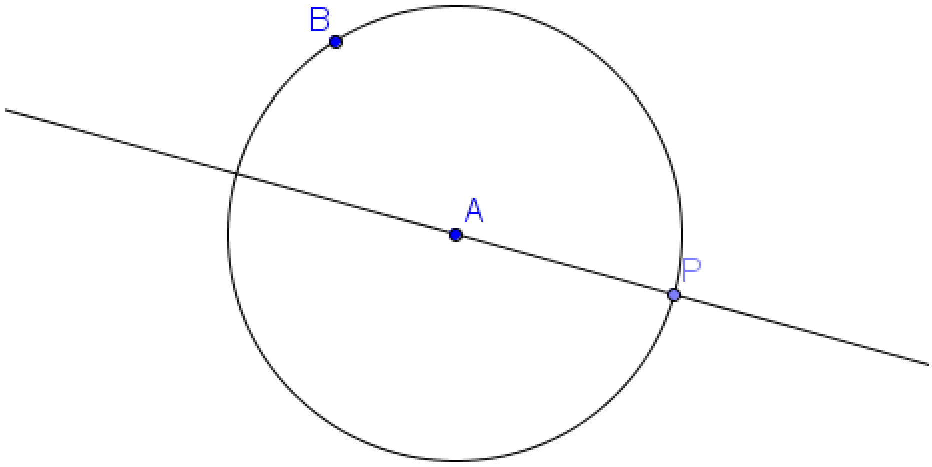


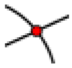
La razón es que el segmento que habíamos dibujado como diámetro solamente depende de P y C, aunque aparentemente pasa por el centro A, no hay ninguna relación con dicho punto; por lo que al cambiar las condiciones iniciales ya dejará de pasar por este punto, tal y como ha ocurrido en la imagen anterior.

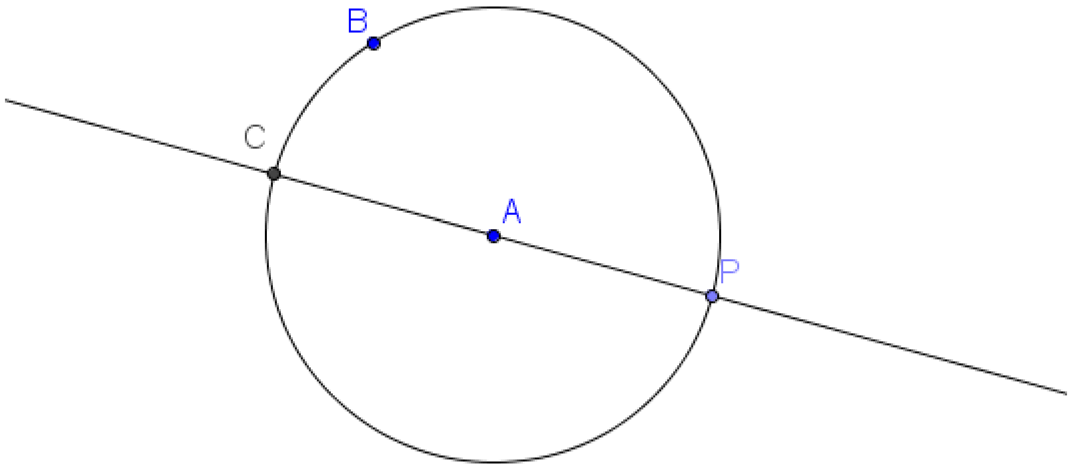
Para resolverlo de manera correcta, es necesario establecer alguna relación con el centro.

Realicemos los pasos siguientes:

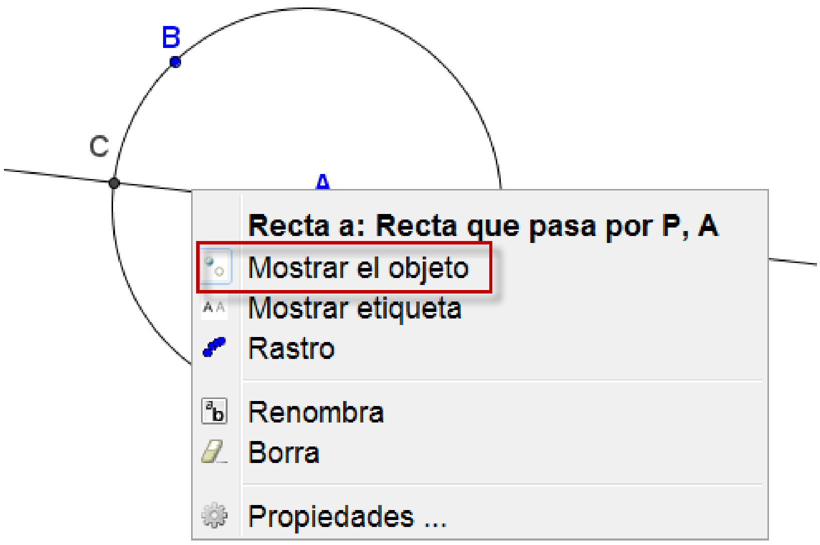
1. Trazamos la recta que pasa por A y P. Para ello, seleccionamos la herramienta **Recta** , pulsando sobre A y posteriormente, sobre P.

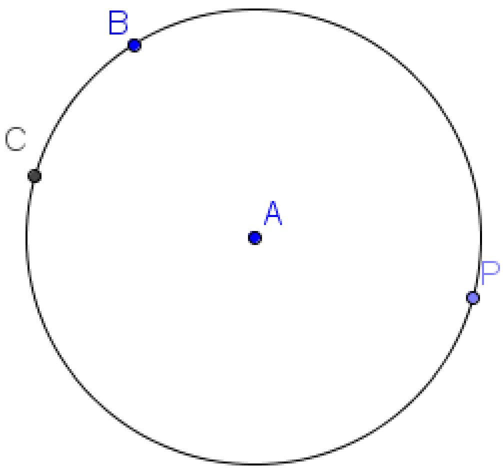


2. Determinamos el punto de intersección de esta recta con la circunferencia. Utilizamos la herramienta **Intersección**  para obtener el punto C.



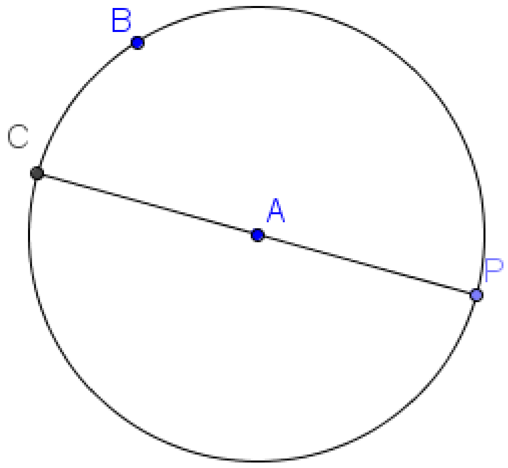
3. Ocultamos la recta anterior. Para ocultar un objeto hay que seleccionarlo, utilizando la herramienta puntero, pulsando a continuación el botón derecho para que aparezcan las opciones que permitirán modificar las propiedades de un objeto. Pulsamos sobre **Mostrar el objeto** para que se oculte.





No es lo mismo ocultar que borrar, ya que al borrar un objeto se eliminarán también aquellos objetos que dependan de él.

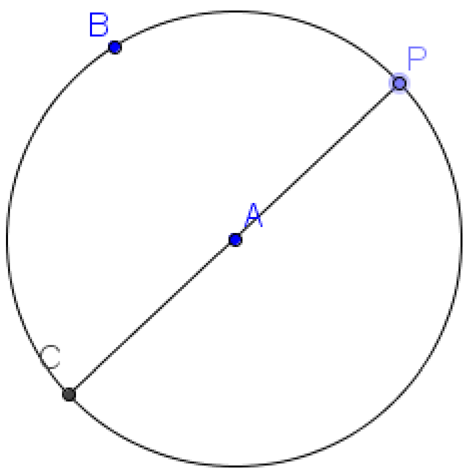
4. Por último, dibujamos el segmento CP utilizando la herramienta **Segmento** .



Aparentemente el resultado es el mismo que habíamos obtenido anteriormente, pero hay una importante diferencia que consiste en que el punto C obtenido como extremo del segmento está relacionado con el centro A ya que es el punto de intersección de la recta que pasa por A con la circunferencia.

Podemos comprobar que el resultado es correcto al mover A, B o el punto P.

Evidentemente, C no podemos moverlo ya que es un punto dependiente de A y de P, como podemos observar por lo colores con los que aparecen representados los distintos puntos.



Lo ocurrido tiene mucho que ver con otro concepto muy importante que debe tenerse en cuenta al trabajar con este tipo de software.

No es lo mismo dibujar que construir. En la primera construcción hemos dibujado una cuerda que aparentemente pasaba por el centro y en el segundo hemos construido una cuerda que pasa por el centro ya que hemos aplicado algunas relaciones, por lo que en este caso, lo que hemos hecho ha sido construir.

Cuando las relaciones o propiedades matemáticas entre los objetos están bien definidas, la construcción será correcta y por tanto, al mover los objetos iniciales, las relaciones se mantienen.

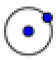
Esta es la característica de dinamismo que GeoGebra nos ofrece.

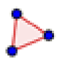
Ejemplo 2

Dibujar un cuadrilátero cuyos vértices estén sobre una circunferencia.

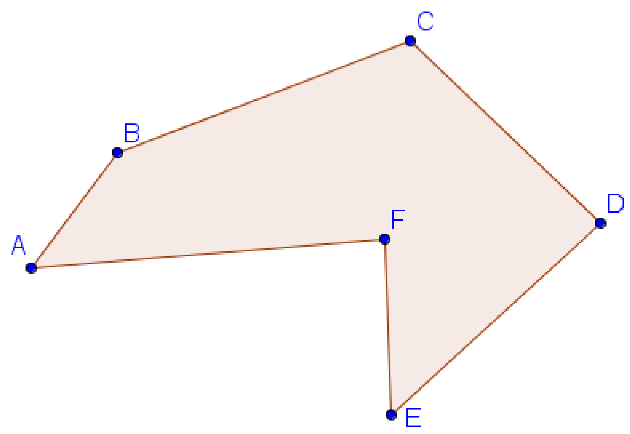
Para iniciar una nueva construcción sobre una hoja de trabajo nueva se utilizará la opción **Nuevo** del menú **Archivo**.

La secuencia de herramientas que se utilizará para realizar la construcción solicitada será la siguiente:

Una vez dibujada la circunferencia utilizando la herramienta **Circunferencia (centro, punto)** .

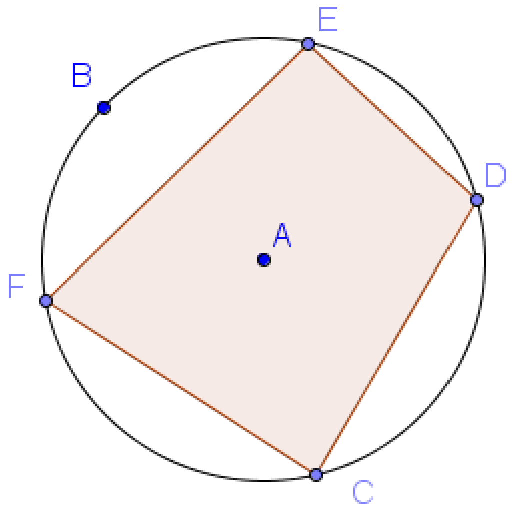
Seleccionamos una nueva herramienta, en este caso **Polígono** .

Esta herramienta nos permite dibujar cualquier polígono a partir de sus vértices; por lo que una vez seleccionada bastará con crear los puntos o pulsar sobre puntos previamente dibujados, para construir el polígono. Es necesario volver a pulsar sobre el vértice inicial para cerrar el polígono.



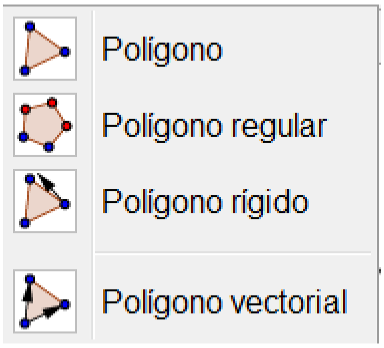
Una vez seleccionada la herramienta **Polígono**, hay que acercar el puntero a la circunferencia para que al hacer clic sobre ella, aparezcan los vértices del cuadrilátero.

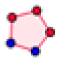
Para finalizar, habrá que marcar de nuevo el primer vértice creado.



Una vez creado el polígono se propone intentar modificar el tamaño y la posición de los distintos objetos para determinar cuales son dependientes y cuales independientes.

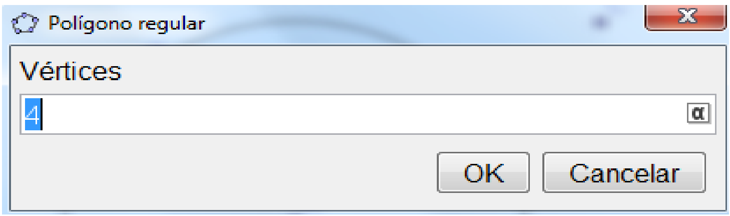
Cuando el polígono que deseamos dibujar es un polígono regular, disponemos de la correspondiente herramienta que se encuentra en el mismo bloque que la herramienta anterior.



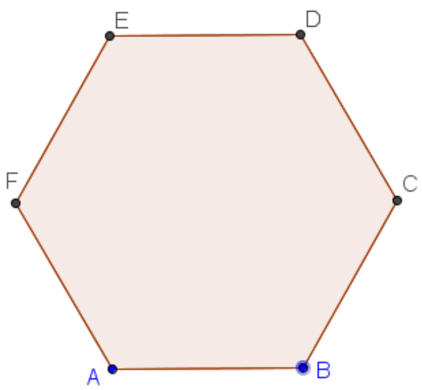
Esta herramienta es **Polígono regular** .

Para dibujar un polígono regular solo necesitamos un segmento que corresponde al lado y el número de lados que tendrá.

Por tanto, una vez seleccionada la herramienta, marcamos o creamos los dos puntos correspondientes al lado; aparecerá el cuadro siguiente para que indiquemos el número de lados.



Por ejemplo, si introducimos el valor 6; al pulsar **OK** aparecerá un hexágono regular.



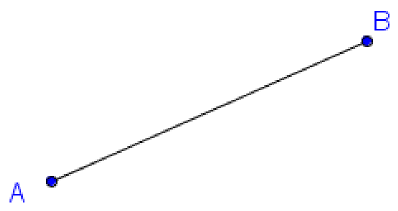
Observamos que solo los puntos iniciales (A y B) son independientes ya que el resto dependen de la longitud de este lado que determinará el polígono regular.

A continuación, proponemos otros ejemplos que nos permitirá conocer nuevas herramientas.

Ejemplo 3

Construye el cuadrado, sabiendo que AB es una de sus diagonales.

Dibujamos un segmento AB cualquiera, como datos iniciales.

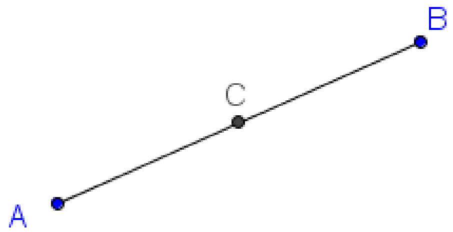


El cuadrado quedará construido cuando encontremos los dos vértices que faltan; para lo que necesitamos aplicar las propiedades matemáticas que determinan las características d este polígono.

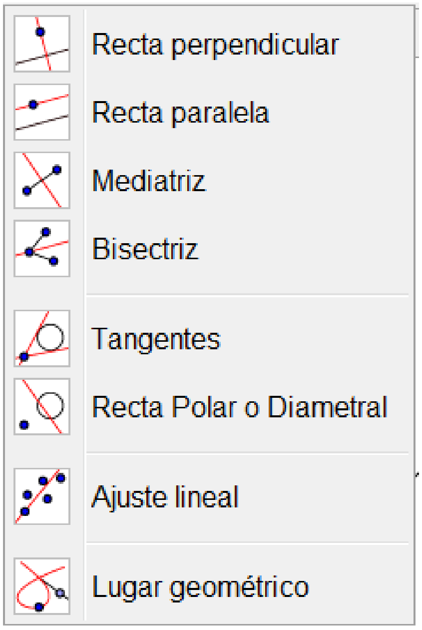
Sabemos que en un cuadrado las dos diagonales son perpendiculares y se cortan en el punto medio.

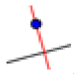
Por tanto, lo primero que haremos será obtener el punto medio del segmento AB, utilizando para ello la herramienta **Punto medio o centro**.

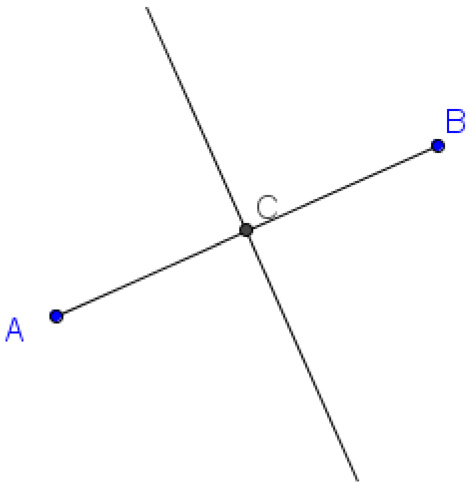
Una vez seleccionada la herramienta, pulsamos sobre el segmento para que aparezca un nuevo punto C que es el punto medio.



Para trazar la recta perpendicular al segmento AB por el punto C recurrimos a la herramienta disponible en GeoGebra, que encontramos en el siguiente bloque de herramientas.

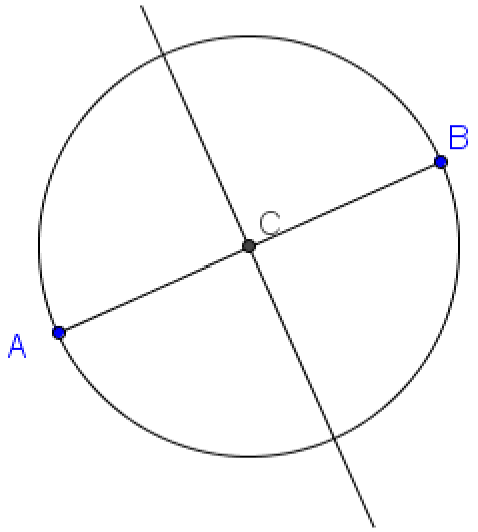


Una vez seleccionada la herramienta **Recta perpendicular** , pulsamos sobre el segmento y sobre el punto C, para que aparezca la recta.

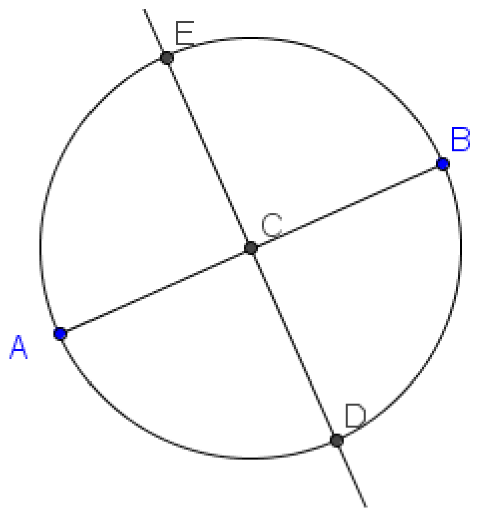


Como sabemos, esta recta es la mediatriz del segmento AB que se podía haber obtenido directamente ya que como observamos en el menú de herramientas anterior, disponemos de una herramienta específica para trazarla, que expondremos más adelante.

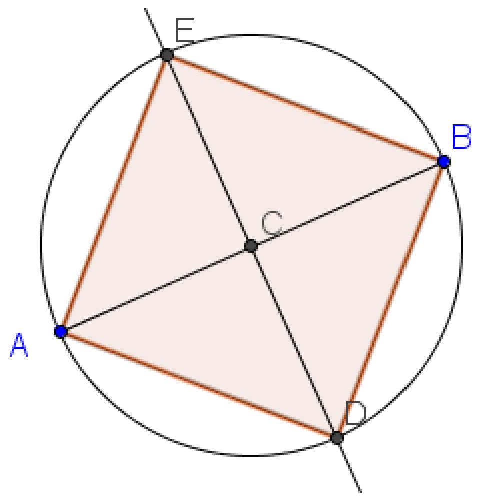
Como las dos diagonales tienen que ser del mismo tamaño, dibujamos una circunferencia de centro C y radio AC, para lo que seleccionamos la herramienta Circunferencia dados su centro y uno de sus puntos, haciendo clic sobre C y, posteriormente sobre A.



Ya solo queda obtener los puntos de intersección de la circunferencia con la recta perpendicular, que serán los dos vértices que completan el cuadrado.



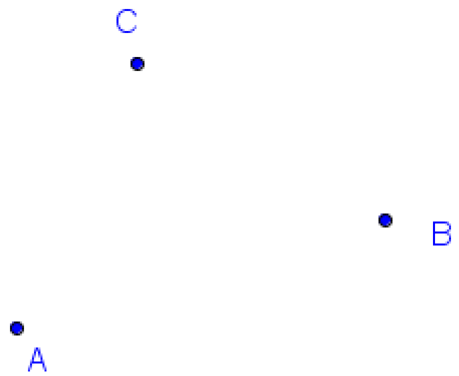
Por último, solo resta utilizar la herramienta **Polígono** para dibujar el cuadrado, pulsado sobre A, D, B, C y de nuevo A.



Ejemplo 4

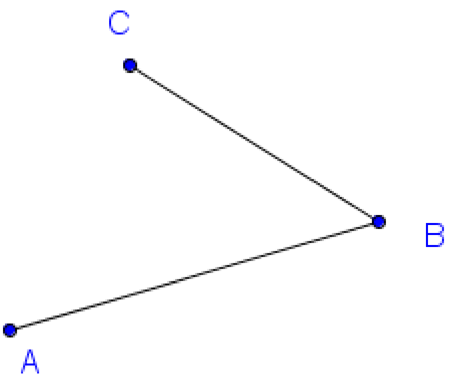
A partir de tres puntos A, B y C, no alineados. Encontrar el cuarto vértice para que ABCD sea un paralelogramo.

Comenzaremos dibujando los tres puntos A, B y D, de manera que no estén alineados.

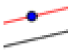


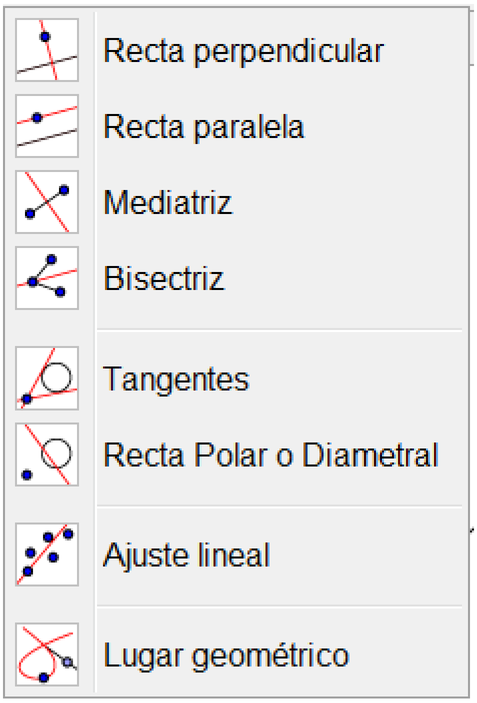
A partir de estos puntos podemos dibujar dos lados del paralelogramo que serán los segmentos AB y BC.

Para ello, utilizamos la herramienta **Segmento**.



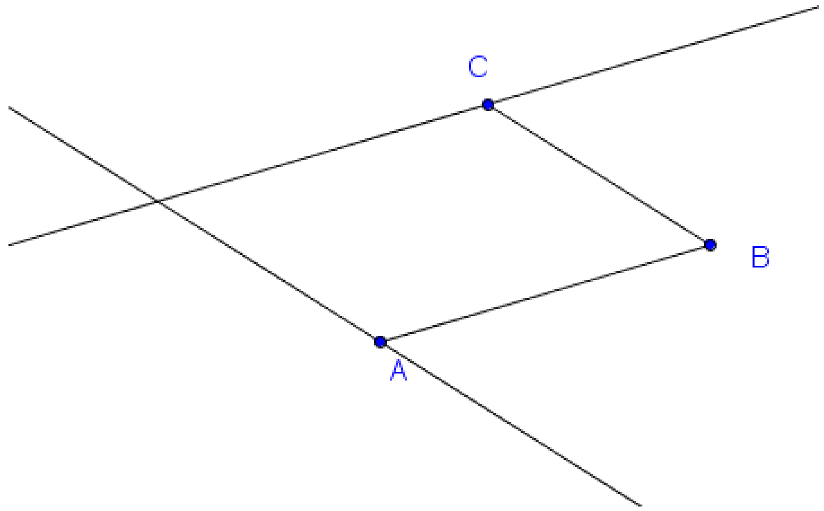
Como los lados que faltan tienen que ser paralelos a los dibujados anteriormente; solo nos quedará trazar las rectas paralelas a AB por el punto C y la recta paralela a BC por A.

Para trazar estas rectas disponemos de la herramienta **Recta Paralela** .



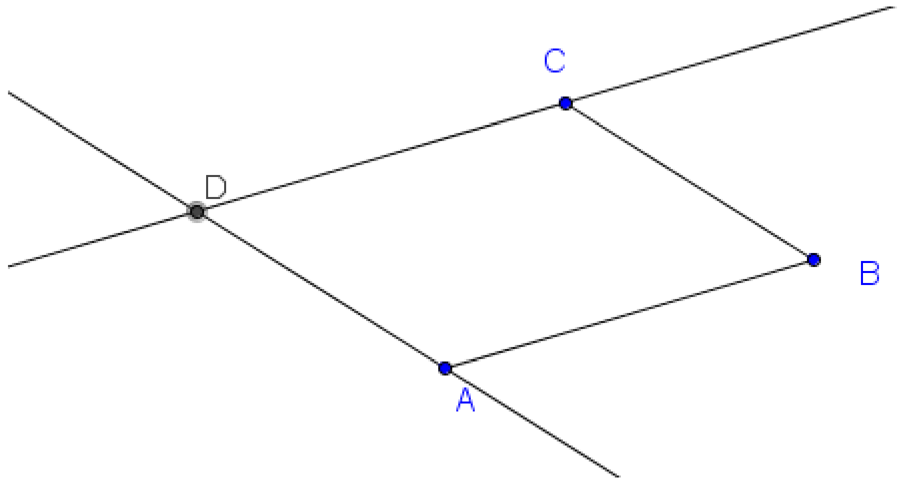
Una vez seleccionada la herramienta Recta paralela hay que pulsar sobre el segmento AB y a continuación sobre el punto C, para obtener la primera de las rectas que será la que contenga a uno de los lados que nos faltan del paralelogramo.

Repetimos el proceso, pulsando a continuación sobre el segmento BC y sobre el punto A, para obtener la segunda recta.

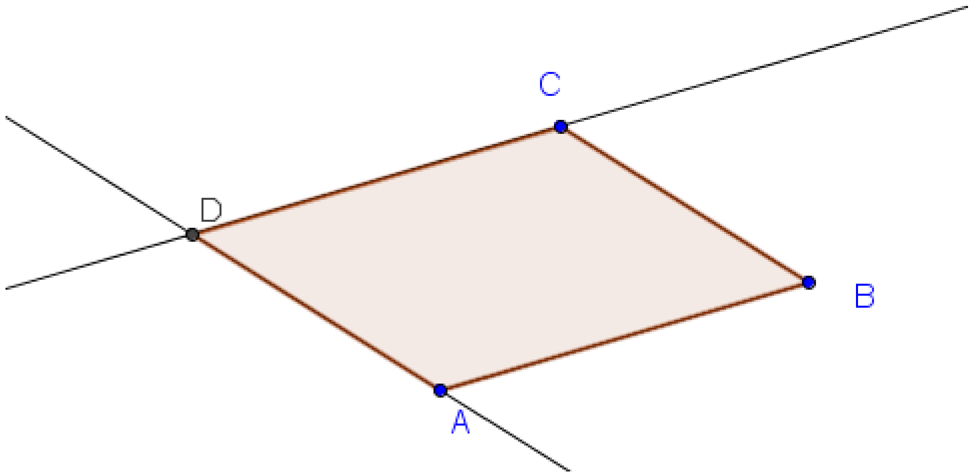


El cuarto vértice será e punto de intersección que obtendremos utilizando la herramienta **Intersección**, pulsando sobre las dos rectas.

Aparecerá el punto D tal y como aparece en la imagen siguiente:



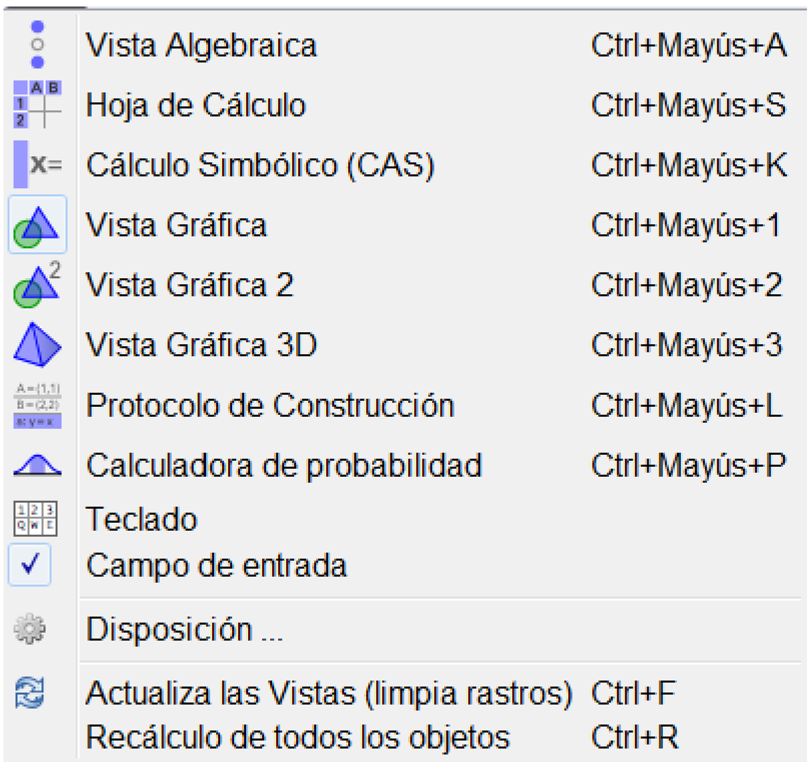
Ya solo nos queda dibujar el paralelogramo. Utilizando la herramienta **Polígono** iremos marcando los vértices A, B, C, D y de nuevo A para cerrarlo.



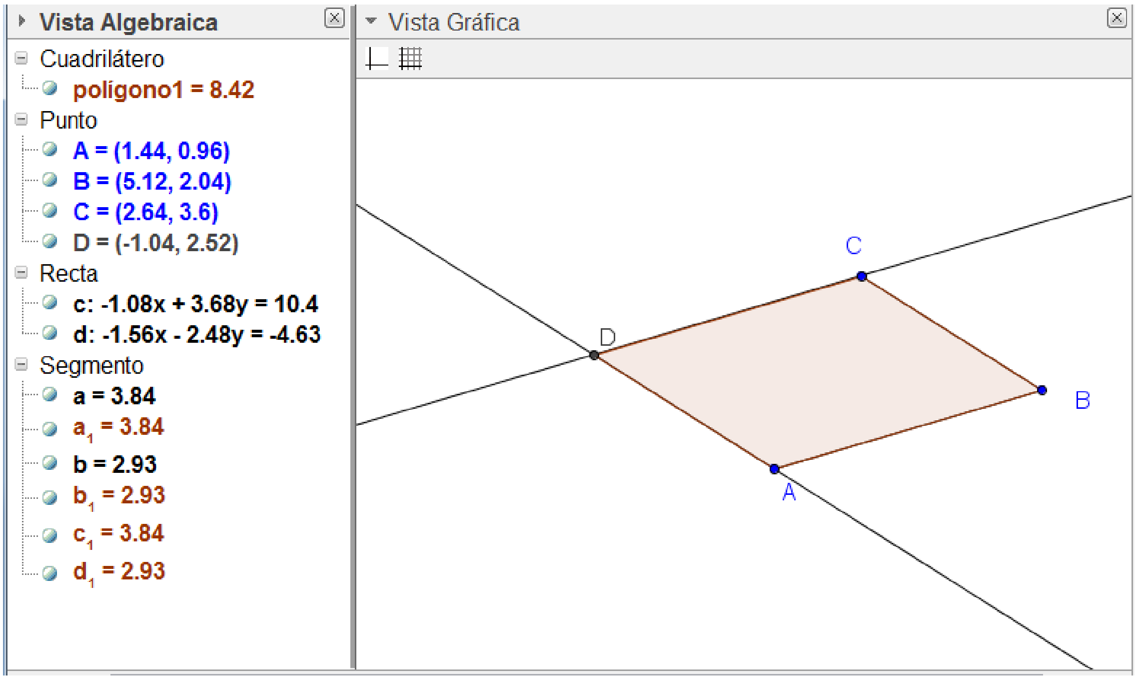
Podemos comprobar que al mover A, B o C, el polígono obtenido sigue siendo un paralelogramo.

Para conocer más aspectos de GeoGebra, podemos mostrar de nuevo la V**ista algebraica** que ocultamos al iniciar este tema.

Para mostrar la **Vista algebraica** pulsamos sobre la opción correspondiente en el menú **Vista**.



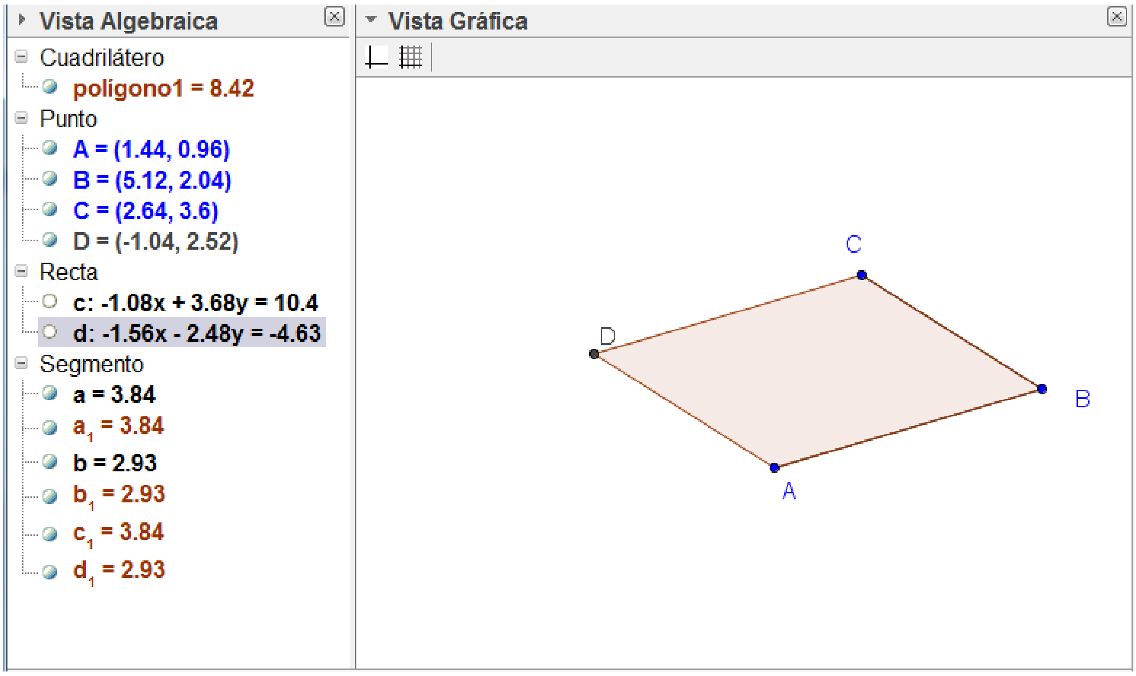
Aparecerá la vista algebraica con información de todos los objetos que han intervenido en la construcción anterior.



Observamos que aparece el cuadrilátero como *polígono1* con un valor que podemos adelantar que corresponde a su área, los puntos con sus coordenadas con respecto a los ejes que ocultamos en su momento, las ecuaciones de las dos rectas y junto a los dos segmentos dibujados en un primer momento, otros valores que corresponden a los lados del paralelogramo con un valor que corresponde a su longitud.

Cada objeto tiene a su izquierda un pequeño círculo que por defecto aparecer relleno.

Si pulsamos sobre los círculos que hay a la izquierda de las rectas, comprobaremos que desaparecerán de la vista gráfica.



Al desmarcar estos círculos conseguimos el mismo efecto que **Ocultar objeto** que expusimos con anterioridad. Al pulsar de nuevo sobre estos círculos, los objetos ocultos aparecerán.

Actividades propuestas I

1. Dibuja la circunferencia que tiene como diámetro el segmento que une dos puntos, previamente dibujados.

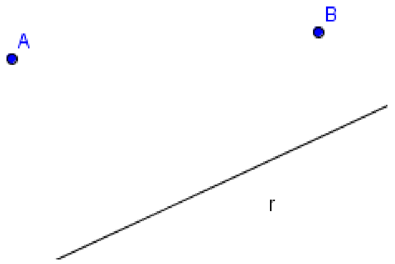
2. A partir de dos puntos A y M. Dibuja el segmento AB tal que M es su punto medio.

3. Dibuja un pentágono y trazar sus diagonales.

4. Dada una circunferencia de centro O, dibuja un triángulo isósceles cuyos vértices sean O y dos puntos de la circunferencia.

5. En un cuadrilátero de vértices ABCD, dibujar el cuadrilátero cuyos vértices son los puntos medios de los lados del cuadrilátero ABCD.

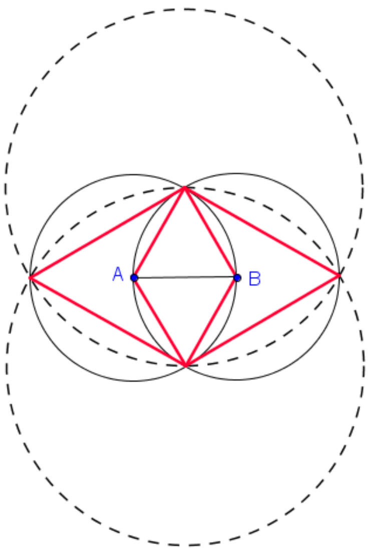
6. Determina en la recta r un punto C tal que el triángulo ABC sea isósceles en A.



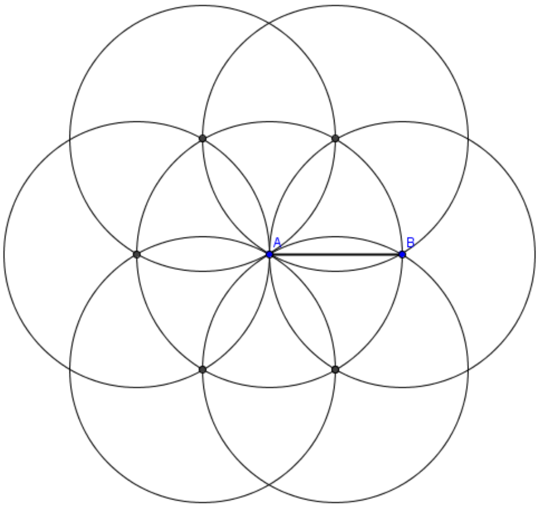
7. A partir de una circunferencia, dibuja el cuadrado inscrito.

8. Construye el cuadrado circunscrito a una circunferencia dada.

9. Realiza la siguiente construcción a partir de un segmento AB, de manera que la figura no se deforme al mover cualquiera de los extremos del segmento.



10. Realiza la siguiente construcción a partir de un segmento AB, de manera que no deforme al mover A o B.

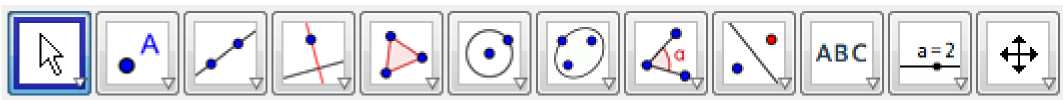


Construcciones geométricas con GeoGebra

Herramientas como **Punto**, **Circunferencia** o **Segmento** se han utilizado en las actividades anteriores para realizar las primeras construcciones sencillas con las que iniciar el trabajo con GeoGebra.

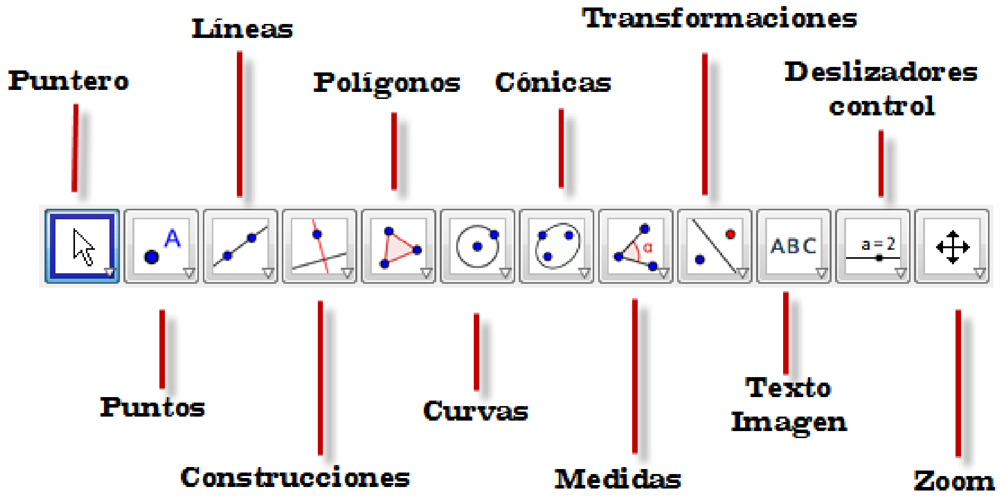
A continuación desarrollamos paso a paso, nuevos ejemplos que ayudarán a conocer nuevas herramientas y sobre todo a manejar este programa y las posibilidades que ofrece.

En la barra de herramientas se encuentran los siguientes bloques:



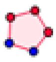
Recordemos que en todo momento existirá una herramienta seleccionada, que aparecerá con un marco de color azul, y lo estará hasta que se realice una nueva selección.

Exponemos a continuación las distintas herramientas disponibles en GeoGebra en cada uno de los bloques.

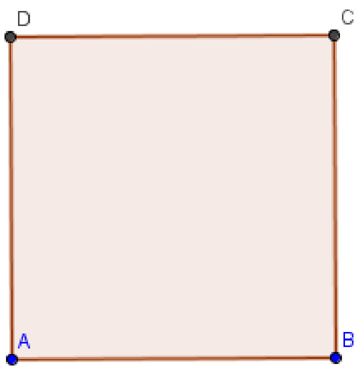


Ejemplo 5

En un cuadrado ABCD, traza la circunferencia inscrita y la circunferencia circunscrita.

El primer paso será construir el cuadrado, para lo cual utilizaremos la herramienta **Polígono regular**  .

Una vez seleccionada, creamos dos puntos A y B, indicando a continuación que el número de lados es 4.



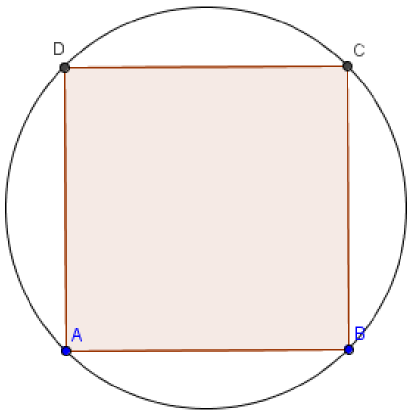
Ya tenemos el cuadrado ABCD sobre el que deseamos dibujar las circunferencias inscrita y circunscrita.

Comencemos por la circunscrita que será la circunferencia exterior que pasa por los cuatro vértices.

Al abrir el bloque de herramientas que hemos denominado **Curvas**, observamos que aparece una herramienta para trazar la circunferencia que pasa por tres puntos (**Circunferencia por tres puntos**).

Podemos utilizar esta herramienta para dibujar la circunferencia circunscrita ya que si pasa por tres vértices, también pasará por el cuarto.

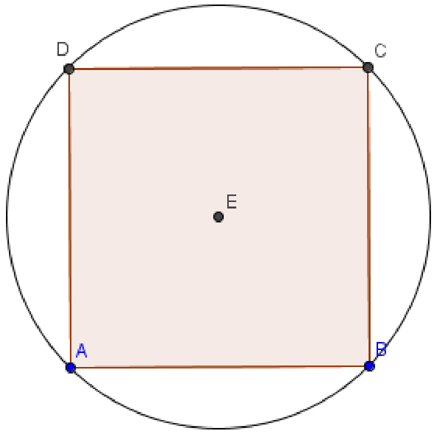
Podemos comprobarlo marcando tres vértices una vez seleccionada esta herramienta. Obtendremos la imagen siguiente en la que aparece la circunferencia circunscrita al cuadrado.



Para trazar la circunferencia inscrita, tenemos que pensar cuáles son sus características.

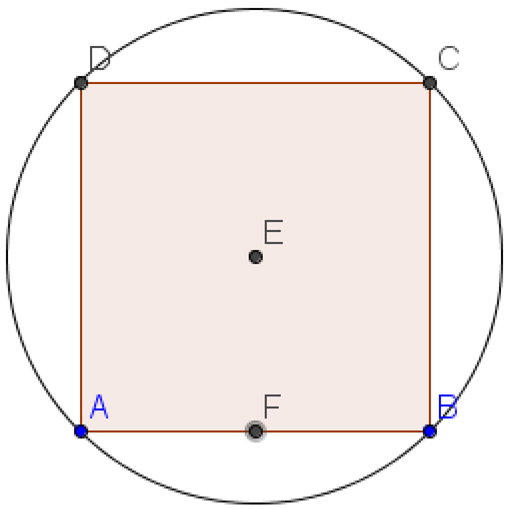
El centro será el punto de corte de las diagonales que es también el punto medio de la diagonal.

Por tanto, utilizamos la herramienta **Medio o centro** para obtener dicho punto. Seleccionamos la herramienta y pulsamos sobre dos vértices opuestos.

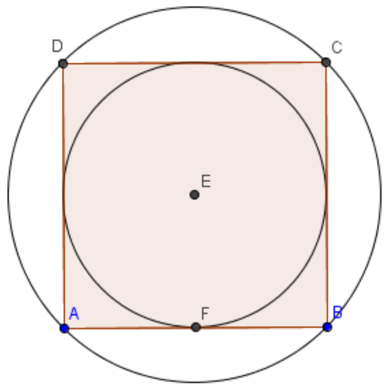


Observemos que para obtener el punto E no ha sido necesario dibujar el segmento.

Ya solo nos queda determinar un punto de la circunferencia inscrita, de la que sabemos que será tangente al cuadrado en los puntos medios de cada lado; por lo que utilizando la misma herramienta anterior, obtenemos el punto medio de cualquier lado.

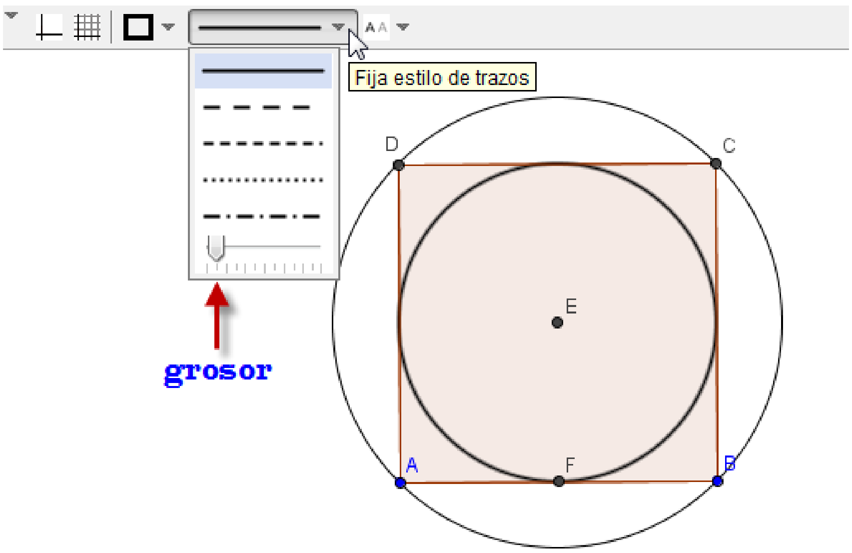


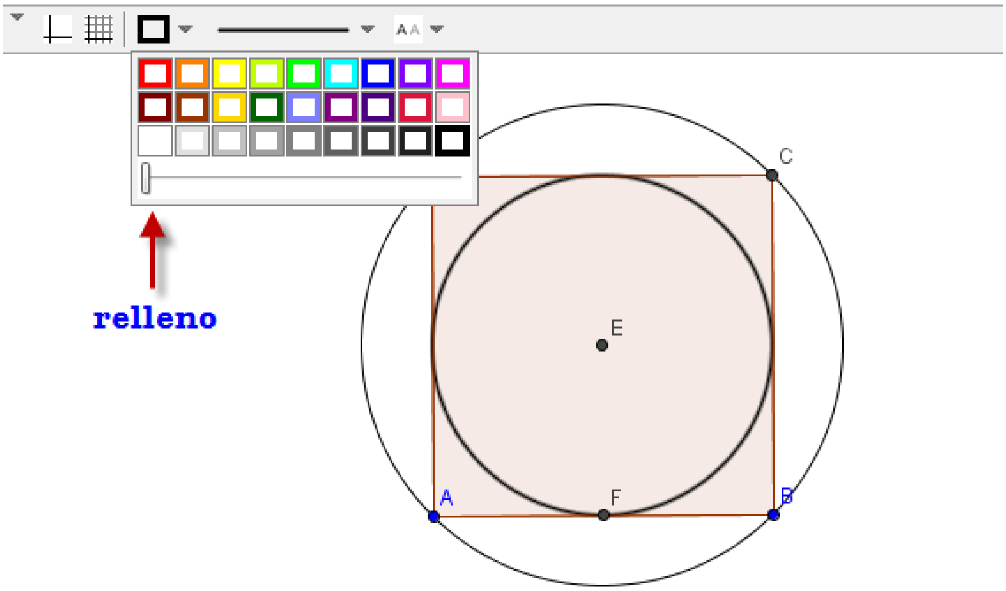
Ya solo queda seleccionar la herramienta **Circunferencia (centro, punto)** para dibujar la circunferencia que tiene centro en E y pasa por F.



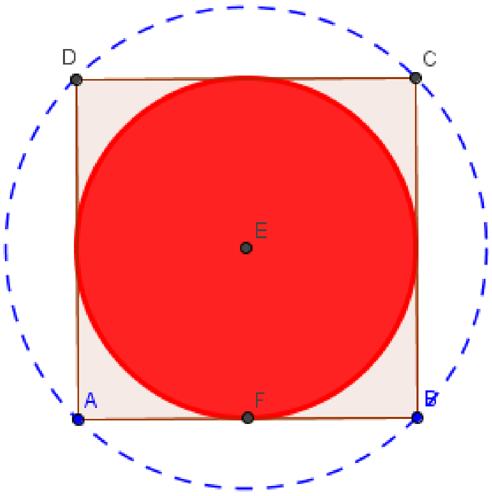
Una vez obtenidas las dos circunferencias, podemos cambiar su aspecto modificando el color, grosor, trazado o relleno.

Una vez seleccionada la circunferencia, utilizando la herramienta **Elige y mueve** , aparecerá en la barra superior de la vista gráficas las opciones para cambiar el color y el relleno, así como las opciones para modificar el estilo del trazado y el grosor.



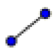


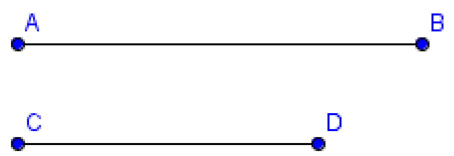
Animamos a cambiar el aspecto seleccionando o cambiando las opciones anteriores.



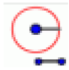
Ejemplo 6

A partir de dos segmentos, construye el rectángulo cuyos lados corresponden a los dos segmentos dados.

Comenzamos dibujando los dos segmentos AB y CD, utilizando para ello la herramienta **Segmento**  .

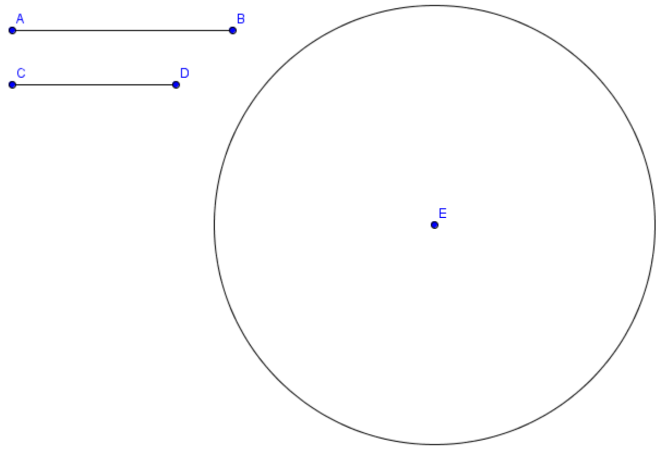


En el siguiente paso, tenemos que utilizar la medida de estos segmentos para construir el rectángulo.

Para ello, utilizaremos la herramienta **Compás** .

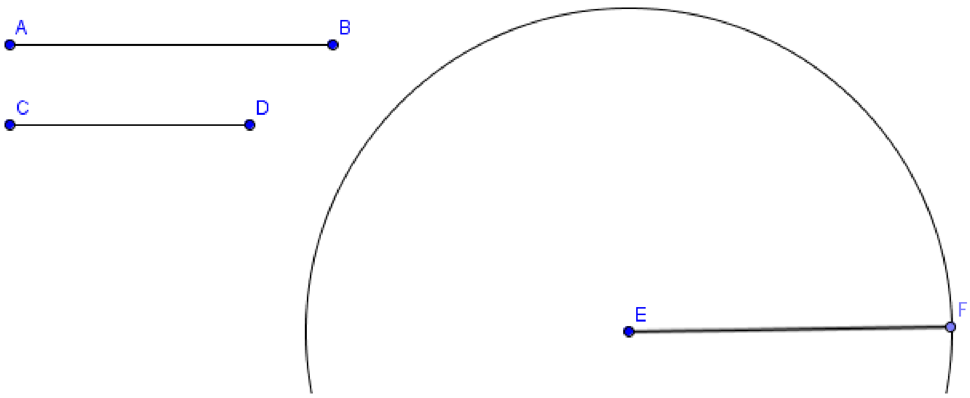
Su funcionamiento es similar al de un compás real. Haremos clic sobre el primer segmento y a continuación, volvemos a hacer clic en cualquier posición libre de la pantalla.

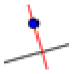
Aparecerá un nuevo punto y una circunferencia cuyo radio es la medida del segmento que previamente hemos elegido.

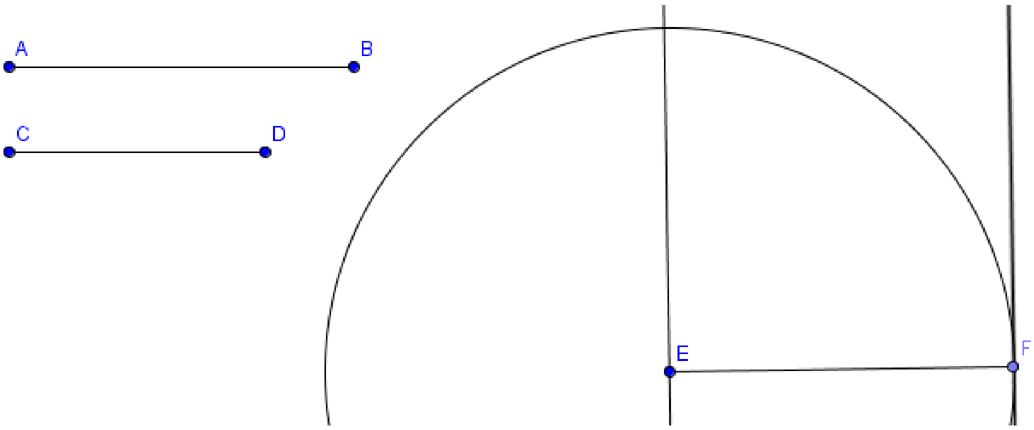


También, una vez marcado el segmento se podría pulsar sobre un punto ya existente en la vista gráfica.

Ya tenemos la medida del primer lado que da la circunferencia, por lo que bastará con crear un punto en la circunferencia, dibujando a continuación el radio correspondiente.

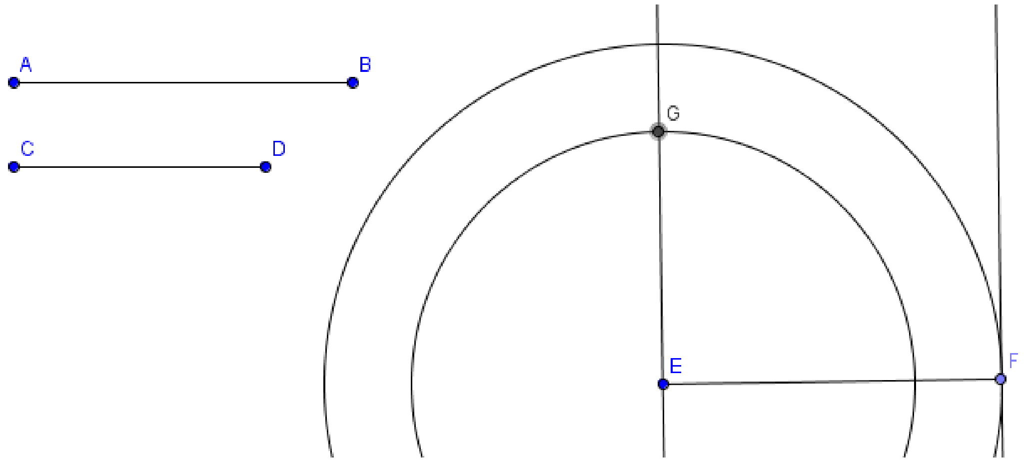


A continuación, trazamos una perpendicular al segmento EF por cada uno de los extremos, utilizando la herramienta **Perpendicular** .

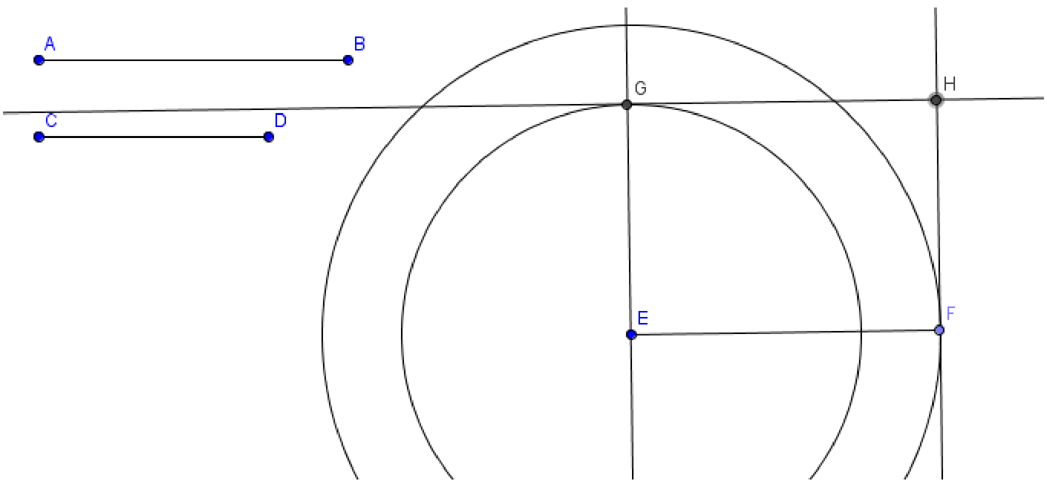


Utilizando de nuevo la herramienta **Compás**, llevamos la medida del segundo segmento a cualquiera de las perpendiculares que acabamos de trazar.

Seleccionamos **Compás**, marcamos el segundo segmento, pulsando a continuación sobre el punto E. Obtendremos una nueva circunferencia cuya intersección con la perpendicular por E, dará la medida del segundo segmento.

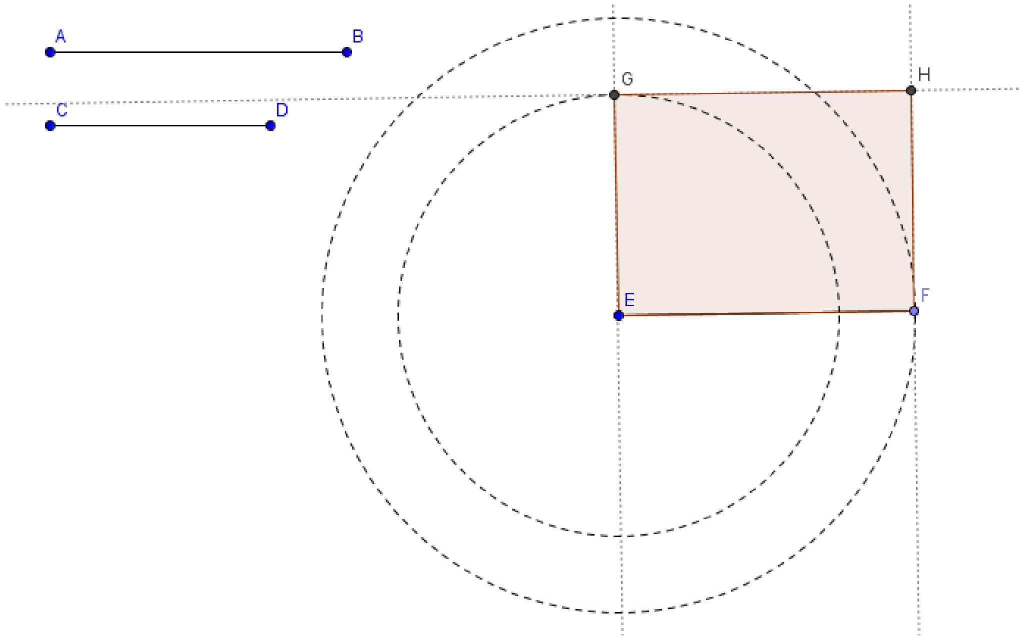


Para obtener cuarto vértice podemos repetir el proceso anterior, llevando de nuevo la medida del segmento, en este caso sobre el punto F; también podemos trazar la paralela al segmento EF por el punto G, para encontrar el punto de intersección que corresponde al cuarto vértice del rectángulo.



Por último, solo queda marcar el rectángulo, seleccionando para ello la herramienta **Polígono**, pulsando sobre los cuatro vértices.

Una vez modificado el aspecto de los objetos utilizados, la construcción quedará en la forma siguiente:

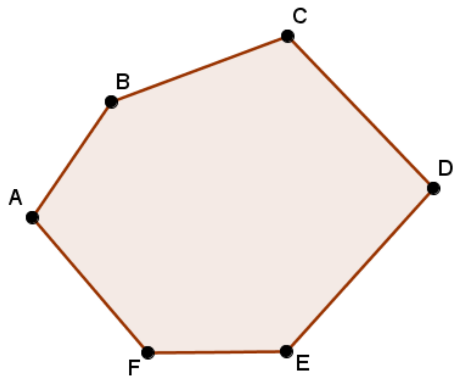


Al arrastrar los objetos iniciales, en este caso, los puntos A, B, C o D, cambiará la medida de los lados y por tanto, el rectángulo final también debe modificarse para tomar los nuevos valores.

Ejemplo 7

A partir de un polígono cualquiera, construir un nuevo polígono de un lado menos y cuya área sea igual a la del polígono inicial.

Con la herramienta **Polígono** dibujamos un hexágono ABCDEF.

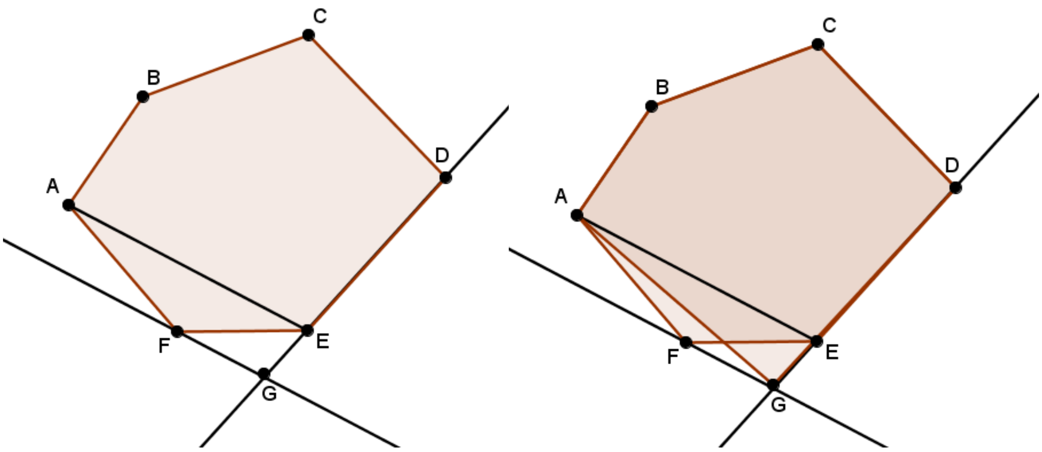


Consideramos el triángulo AEF y aplicamos que dos triángulos de igual base y altura tienen igual área.

Prolongamos el lado DE utilizando la herramienta Recta que pasa por dos puntos.

Con la herramienta **Paralela** dibujamos la paralela por el punto F al lado AE, previamente trazado utilizando la herramienta **Segmento**.

El punto G, intersección de la recta paralela anterior y de la prolongación del lado DE, es el vértice buscado del polígono ABCDG, de igual área que la del polígono original.



Ejemplo 8

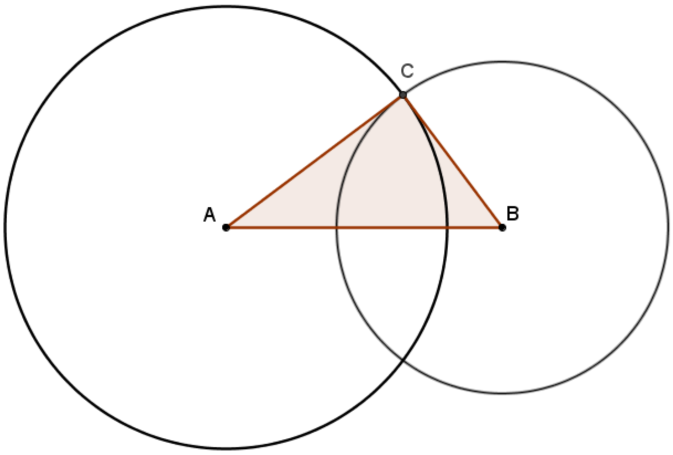
Dibujar el triángulo cuyos lados miden 3, 4 y 5 cm.

Dibujamos un segmento cualquiera utilizando la herramienta **Segmento de longitud dada** fijamos la longitud del lado correspondiente a 5 cm.

A continuación, seleccionamos la herramienta **Circunferencia (centro, radio)**, y trazamos una circunferencia con centro en un extremo del segmento y radio 3 cm.

Repetimos el proceso, dibujando una circunferencia con centro en el otro extremo y radio 4 cm.

Seleccionamos **Intersección** para obtener el tercer vértice del triángulo buscado y por último, sólo queda dibujar el triángulo, para lo cual hemos utilizado la herramienta **Polígono**.

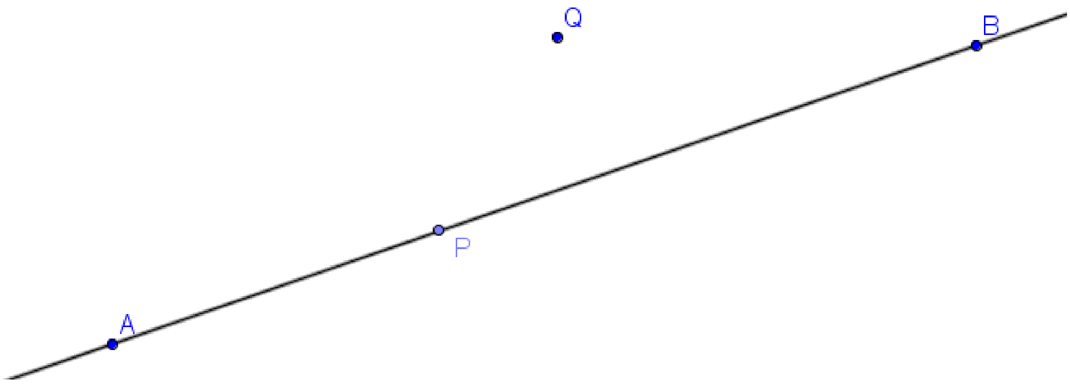


Ejemplo 9

Sea P un punto de una recta y Q un punto que no pertenece a la recta.

Dibuja la circunferencia que pasa por el punto Q y es tangente a la recta en el punto P.

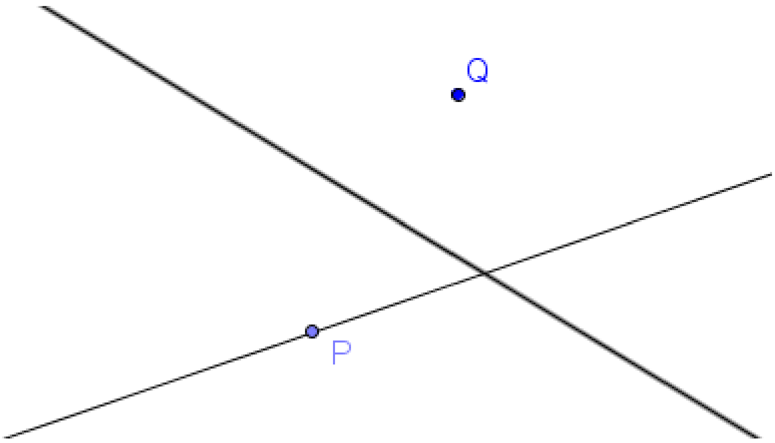
Comenzamos dibujando los objetos iniciales: una recta, un punto P en la recta que no sea ninguno de los puntos (A y B) utilizados para crearla y un punto Q que no pertenezca a la recta.



Para encontrar la circunferencia pedida es necesario determinar su centro.

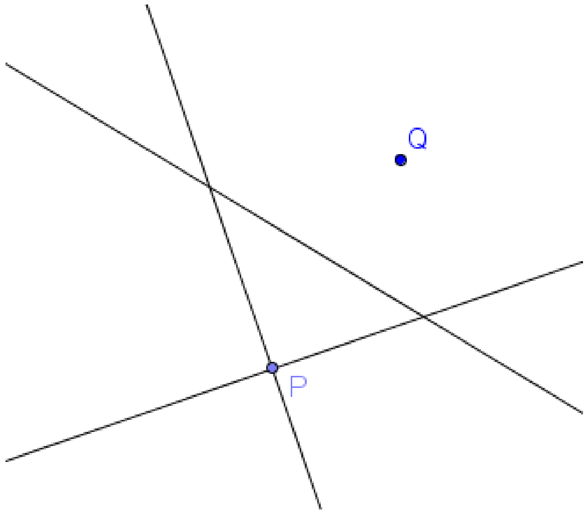
Como P y Q son puntos de la circunferencia, significa que el centro estará a la misma distancia de ellos. Por tanto, el centro estará en la mediatriz de los dos puntos o lo que es lo mismo, en la mediatriz del segmento PQ.

Seleccionamos la herramienta **Mediatriz**, pulsando a continuación sobre P y Q. Aparece la mediatriz, sin necesidad de haber dibujado previamente el segmento PQ.

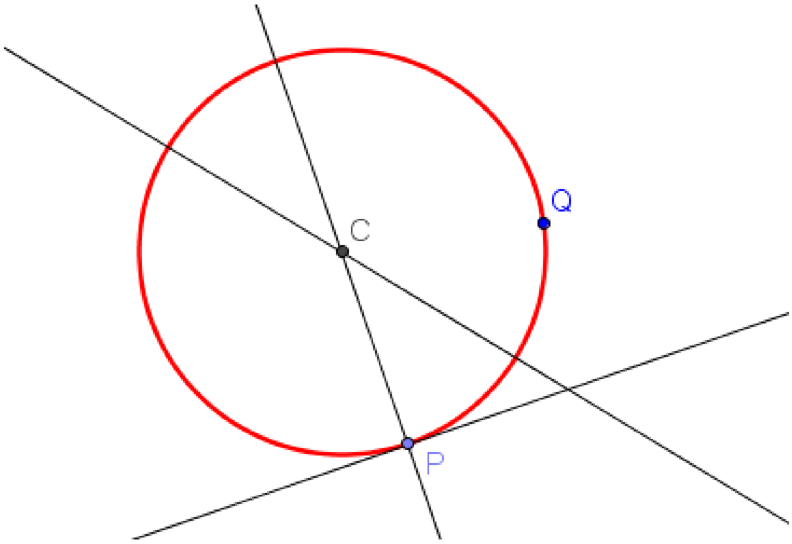


La recta inicial es la tangente a la circunferencia en P, por lo que el radio trazado por P será perpendicular.

Esto supone que el centro se encontrará en la recta perpendicular a la recta por el punto P que trazamos utilizando la herramienta **Recta Perpendicular**.



El punto de intersección de esta recta con la mediatriz dará el centro de la circunferencia que trazaremos utilizando la herramienta **Circunferencia (centro, punto)** tomando un punto que puede ser P o Q.

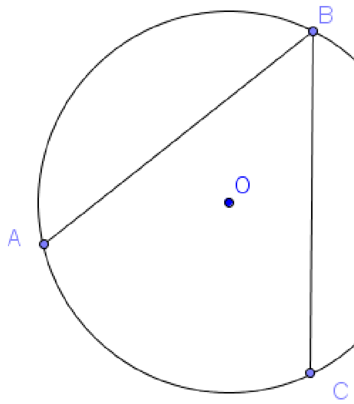


Comprobaremos que la construcción está bien hecha moviendo los objetos iniciales. Por ejemplo, si movemos los puntos P o Q, la circunferencia seguirá cumpliendo las condiciones pedidas.

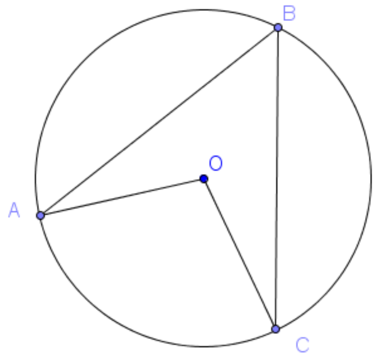
Ejemplo 10

Determina la relación entre un ángulo inscrito en una circunferencia y su correspondiente ángulo central.

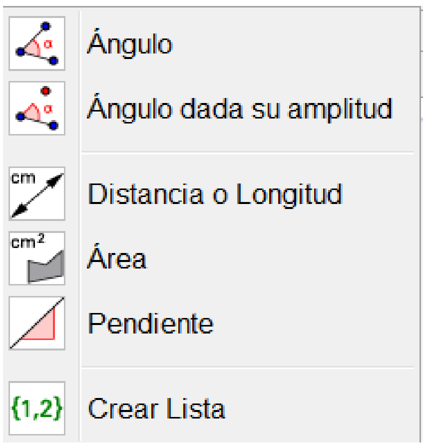
Comenzamos dibujando una circunferencia y un ángulo inscrito marcando tres puntos en la circunferencia que uniremos mediante segmentos.



A continuación dibujamos el ángulo central AOC, trazando para ello, los segmentos AO y OC.

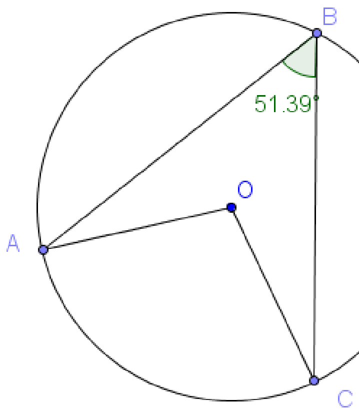


Para obtener la medida de los ángulos, utilizamos la herramienta **Ángulo**  que encontramos en el bloque siguiente:

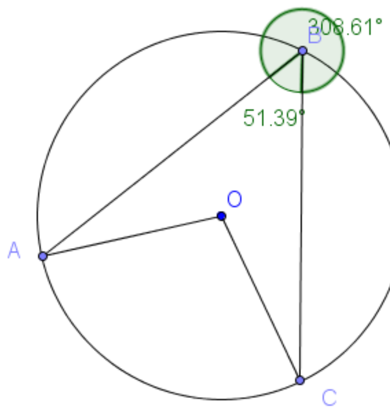


Para medir el ángulo ABC, una vez seleccionada la herramienta pulsamos sobre los puntos A, B y C, siguiendo este orden.

Aparecerá la medida del ángulo tal y como aparece en la figura siguiente:



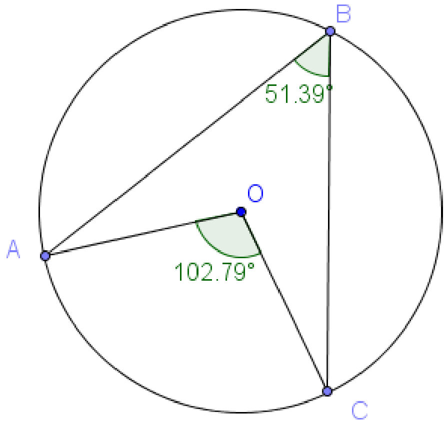
Si los puntos se marcan en el orden C, B y A, la medida que se obtiene corresponde al ángulo exterior.



Cuando alguna acción no sea la esperada recurrimos a deshacer, utilizando las opciones disponibles en la parte superior derecha de la ventana de GeoGebra  o en las opciones que encontraremos en el menú **Edita**.

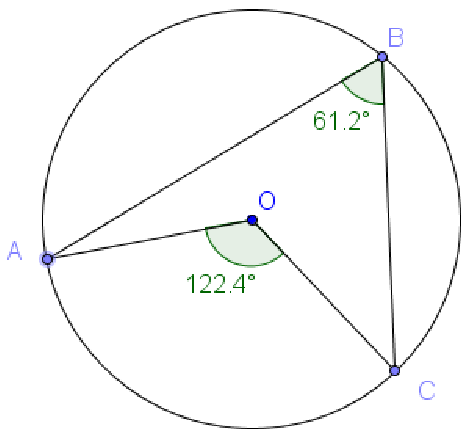
.

A continuación, medimos el ángulo central AOC.



Aparentemente el ángulo central no es el doble del ángulo inscrito ya que 2 x 51,39 = 102,78 y no 102,79 que es el valor que aparece en la construcción.

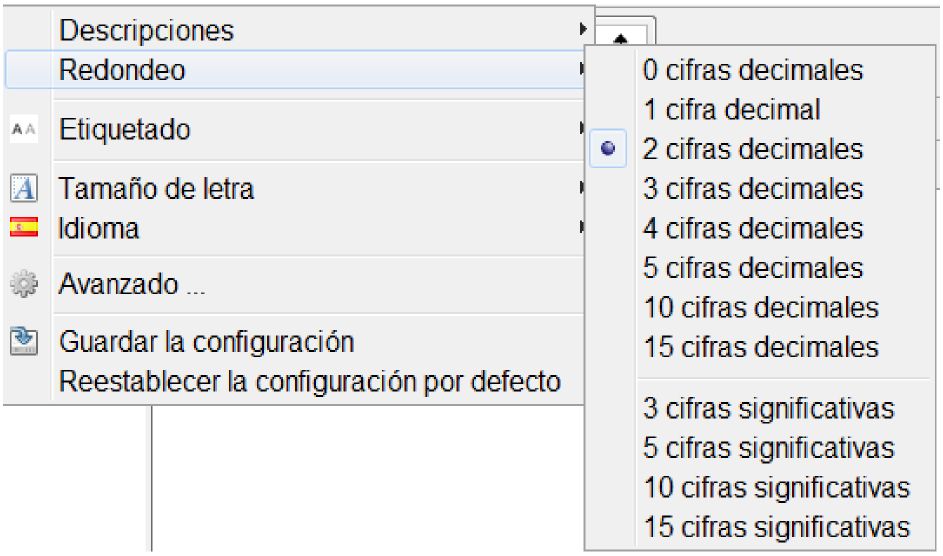
Podemos cambiar la posición de cualquiera de los puntos para observar qué ocurre.



Para estos valores si se cumple la relación, por lo que algo ocurre.

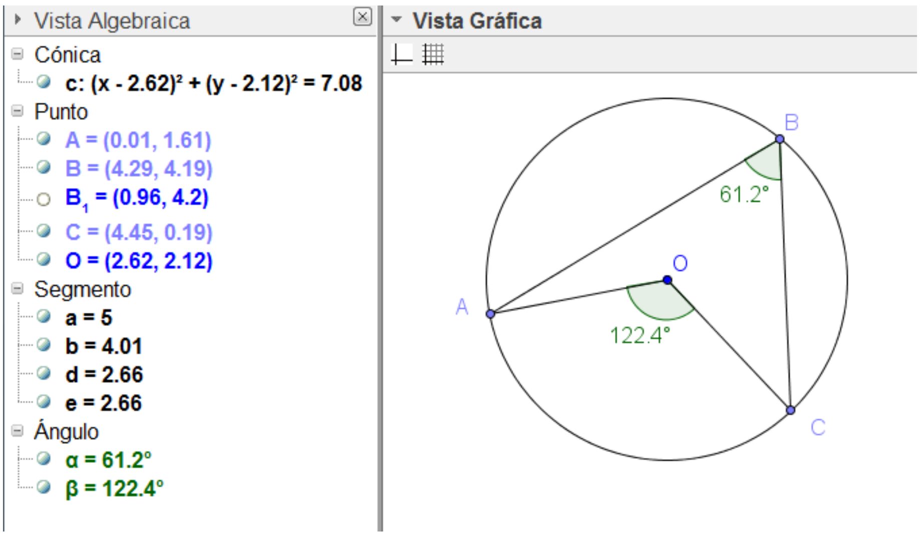
Lo ocurrido es que las medidas que utiliza GeoGebra se aproximan a la cantidad de cifras decimales establecidas previamente (por defecto es dos).

Estos valores se podrán cambiar a través de la opción **Redondeo** en el menú **Opciones**.



Podemos hacer aún algo más.

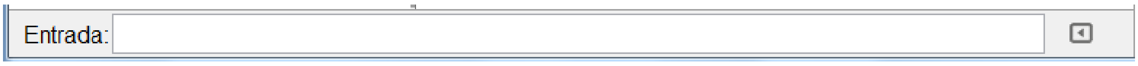
Para ello, activamos la vista algebraica, de manera que aparezcan todos los objetos que intervienen en la construcción con su nombre y valor.



Observamos que α es el ángulo inscrito y β su correspondiente ángulo central.

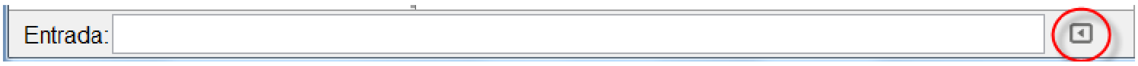
Para obtener la relación entre ambos, tenemos que obtener el valor de β/α.

Este valor lo calcularemos utilizando la línea de entrada.

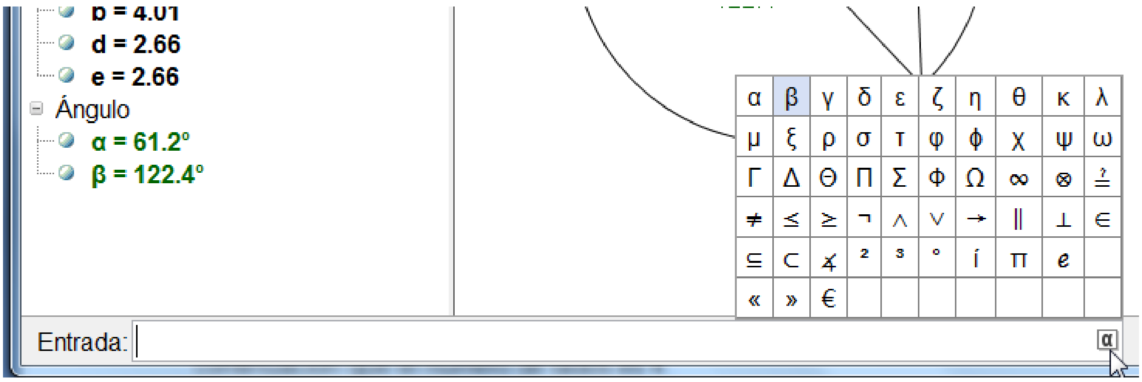


A través de esta línea disponemos de una completa calculadora, en la que para realizar cualquier operación, bastará con escribir los nombres de los objetos que deseamos utilizar como datos.

Para escribir β/α en la línea de entrada, pulsamos sobre la punta de flecha aparece en la línea de entrada.

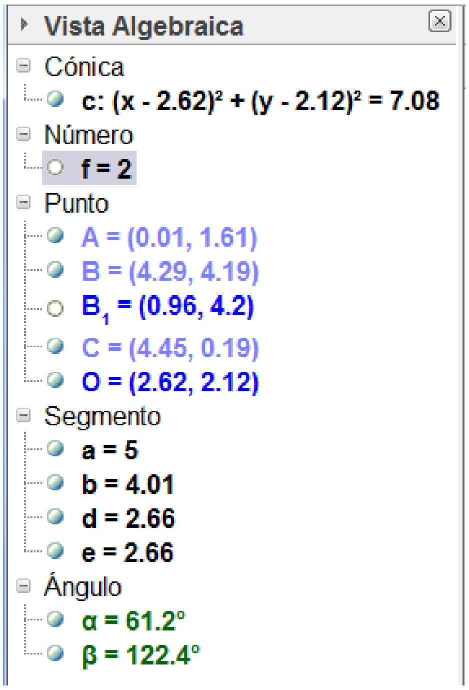


Aparecerá una tabla con distintos símbolos, en los que encontramos las letras griegas que corresponden a los nombres de los ángulos que hemos utilizado en la construcción.



Pulsamos sobre β, a continuación escribimos **/** que corresponde al símbolo de la división, y por último, pulsamos sobre α.

Al pulsar la tecla **Enter** aparecerá un nuevo valor en la vista algebraica.



A continuación, manipulamos la construcción cambiando la posición de los puntos A o C para observar que este valor no cambia.

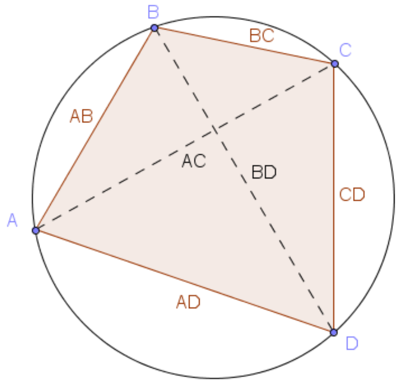
Por tanto, podemos deducir que la relación entre los dos ángulos es que el central es doble del ángulo inscrito.

Más adelante expondremos otros ejemplos en los que utilizaremos la línea de entrada para realizar cálculos que además, incluiremos en la vista gráfica.

Ejemplo 11. Teorema de Ptolomeo

Si un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia, la suma de los productos de los pares de lados opuestos es igual al producto de las diagonales.

El primer paso que debemos realizar con GeoGebra será realizar la construcción de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, dibujando a continuación las diagonales, tal y como aparece en la imagen anterior.



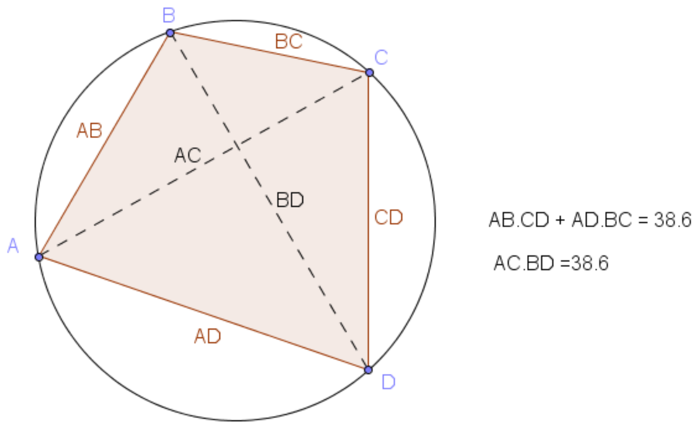
AB.CD + AD . BC = AC . BD

A continuación, dado que la medida de los lados y de las diagonales aparece directamente al construirlos, solo nos quedará obtener el valor de las dos expresiones que deseamos comprobar que son iguales.

Por un lado, calculamos el valor de AB*CD+AD*BC, para lo que bastará con introducir esta expresión en la línea de entrada (o los nombres de los correspondientes segmentos, si no hemos procedido a renombrarlos) para obtener su valor.

De manera análoga obtendremos el valor del producto de las dos expresiones, escribiendo AC*BD en la línea de entrada.

Observamos que los dos valores coinciden tal y como aparece en la imagen siguiente:



Como último paso, para poder considerar que hemos demostrado el teorema bastará con manipular la construcción moviendo los objetos para considerar que la igualdad entre las dos expresiones se cumple.

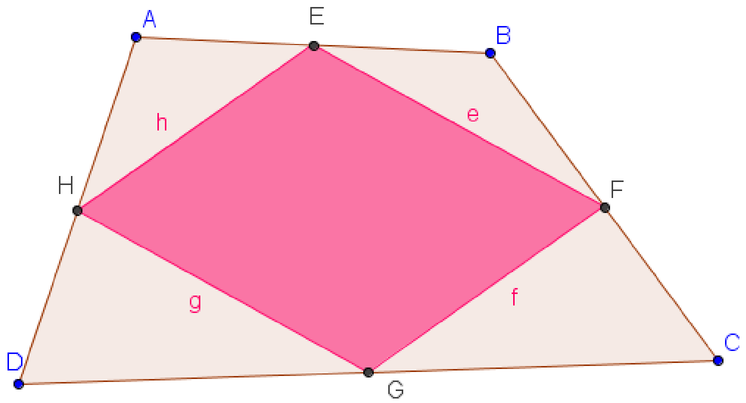
Podemos pensar que los dos valores anteriores corresponden a una aproximación con tantos decimales como se hayan indicado a través de la opción Redondeo del menú Opciones, por lo que solo nos quedaría obtener el valor de la diferencia entre las dos cantidades para comprobar que siempre se mantiene igual a 0.

Un proceso similar servirá para considerar demostrado, aunque de manera gráfica el siguiente teorema, ya que se trata de comprobar una relación entre los valores de unas determinadas medidas obtenidas a partir de un triángulo.

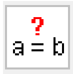
Ejemplo 12. Teorema de Varignon

Los puntos medios de un cuadrilátero determinan un paralelogramo cuya área es la mitad del área del cuadrilátero.

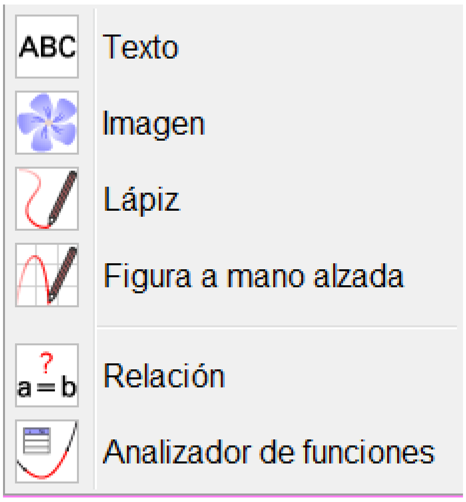
Una vez dibujado el cuadrilátero ABCD, dibujamos un nuevo polígono EFGH, uniendo los puntos medios de cada uno de los lados.



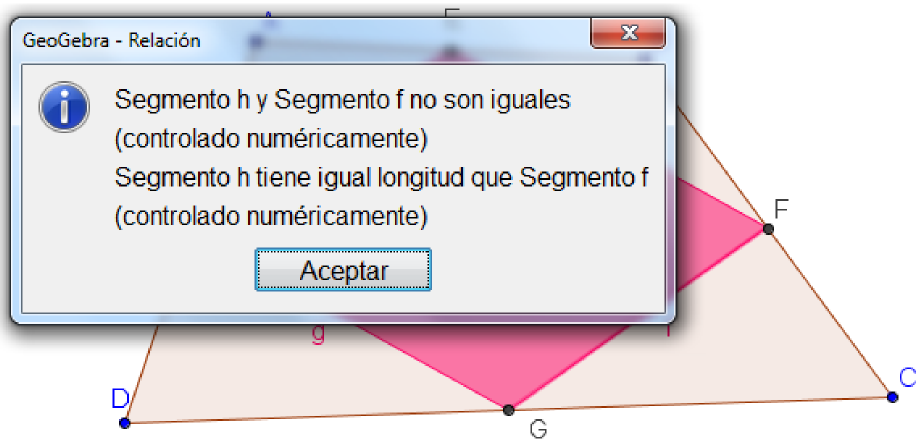
A continuación, tenemos que determinar la relación entre los lados h y f así como entre e y g, para deducir que se trata de un paralelogramo.

Para ello, utilizaremos la herramienta 

Relación que aparece en el bloque siguiente:

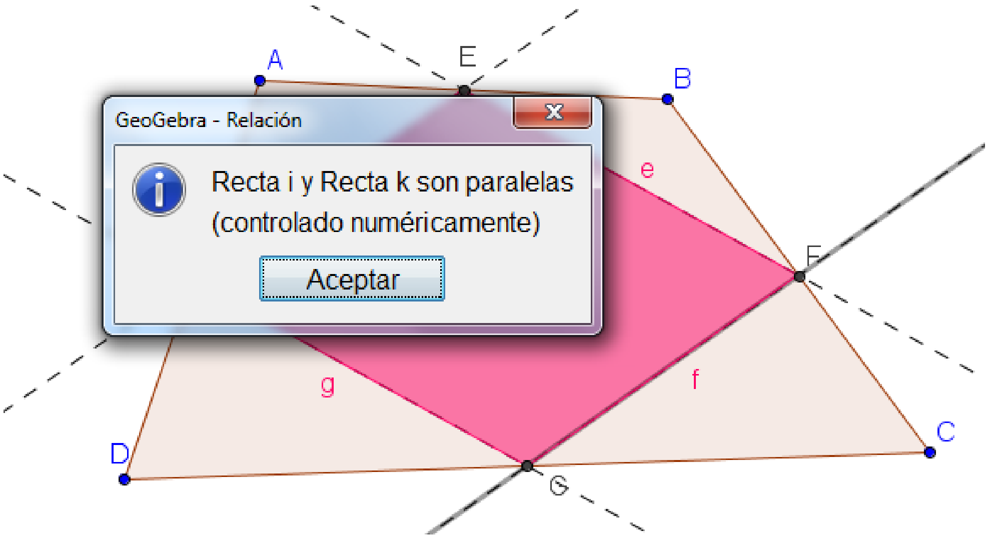


Una vez seleccionada esta herramienta marcamos los segmentos h y f, obteniendo que son segmentos distintos, lo cual es evidente pero que son del mismo tamaño, como podemos observar en la imagen siguiente:



La misma relación obtendremos entre los segmentos e y g.

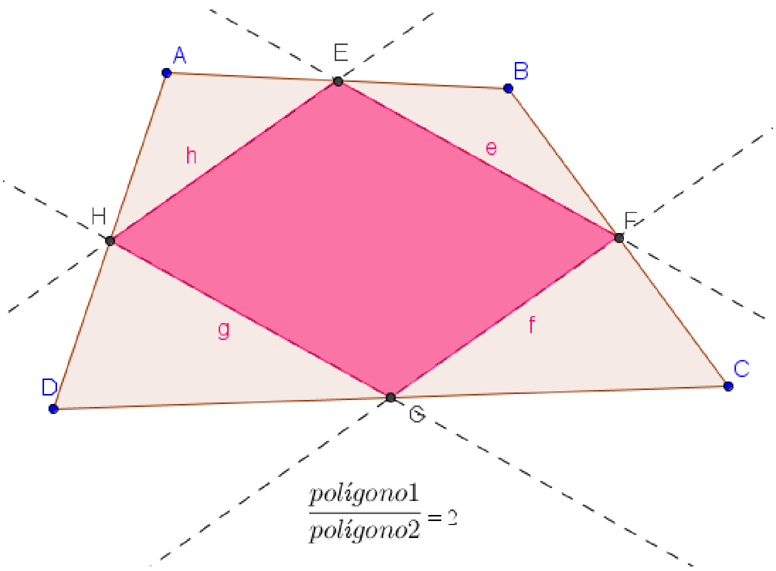
Por tanto, solo nos queda determinar que los lados son paralelos para determinar que se trata de un paralelogramo. Para ello, es necesario dibujar las rectas que contienen a cada uno de los lados de manera que con la ayuda de la herramienta Relación entre dos objetos preguntamos sobre las dos rectas, obteniendo el siguiente resultado:



El mismo resultado nos dará el programa al preguntar por las otras dos rectas, por lo que al menos para este cuadrilátero podemos establecer que el polígono obtenido uniendo los puntos medios es un paralelogramo.

¿Y para otros casos? Solo hay que mover para comprobar que las relaciones se mantienen.

Por último, para establecer la relación entre las áreas bastará con calcular el valor del cociente entre las dos áreas, cuyos valores aparecen directamente en la vista algebraica y que en este caso serán polígono1 y polígono2.



Como el cociente es 2, podemos establecer que una es doble de la otra.

Por tanto, creo que podemos considerar demostrado o al menos decir que siempre se cumple el teorema de Varignon.

Transformaciones en el plano

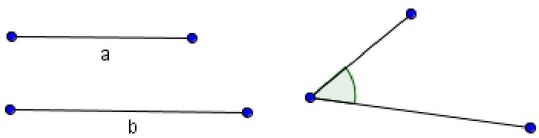
Las distintas herramientas que permitirán realizar transformaciones en el plano, las encontramos en el siguiente bloque:

Realicemos a continuación algunos ejemplos en los que utilizaremos estas herramientas.

Ejemplo 13

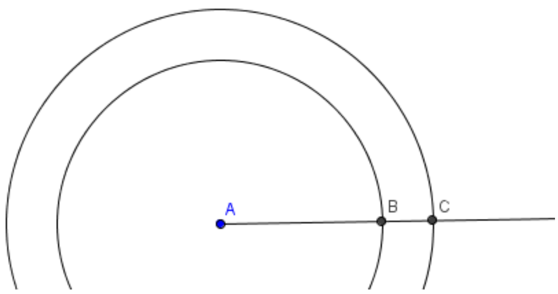
Construye un triángulo, a partir de dos de sus lados y del ángulo comprendido.

Una vez dibujados los segmentos a y b correspondientes a los lados y al ángulo, trazamos una semirrecta sobre la que trasladaremos las distintas medidas.

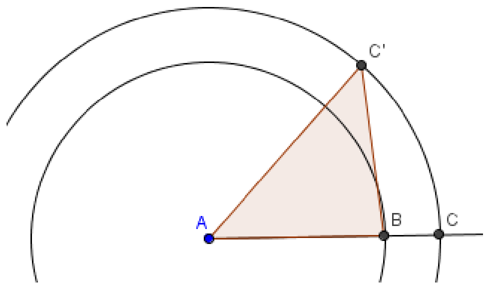


Con la herramienta **Circunferencia (centro, radio)**, dibujamos sendas circunferencias de radios a y b, tomando como centro el origen de la semirrecta, que corresponderá al vértice A del triángulo buscado.

Estas circunferencias determinan dos puntos de intersección con la semirrecta, que corresponden al vértice B del triángulo y a un punto C que da la distancia del segundo lado.



Utilizamos la herramienta **Rota alrededor de un punto** para girar el punto C alrededor del punto A con ángulo de rotación igual al ángulo medido en A; obtendremos el punto C' que corresponde al tercer vértice del triángulo.

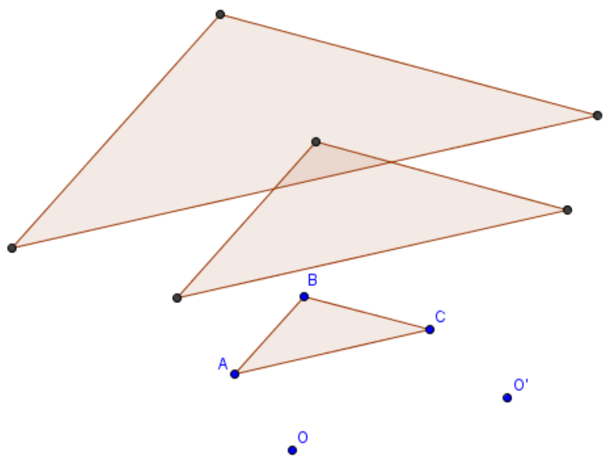


Ejemplo 14

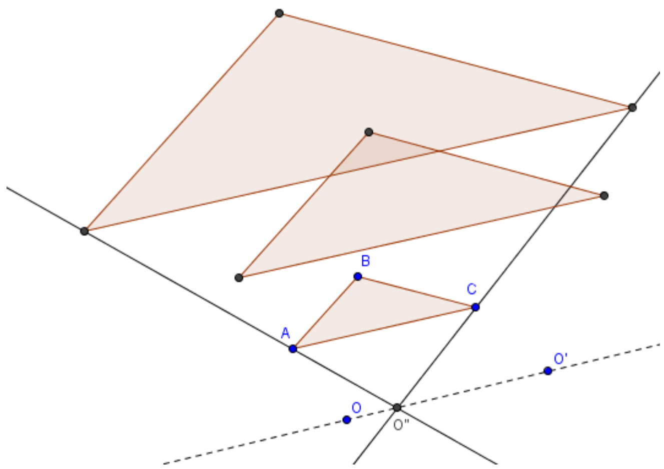
Comprobar que la composición de dos homotecias de centros diferentes, es una homotecia cuyo centro está alineado con los anteriores y su razón de homotecia es el producto de las razones.

Dibujamos un triángulo ABC, dos puntos O y O' que utilizaremos como centros de las sucesivas homotecias, cuyas razones sean 2 y 1'5, respectivamente.

Realizamos la primera homotecia del triángulo con centro en O y razón 2 y, al triángulo obtenido le aplicamos una nueva homotecia de razón 1'5 y centro O'.

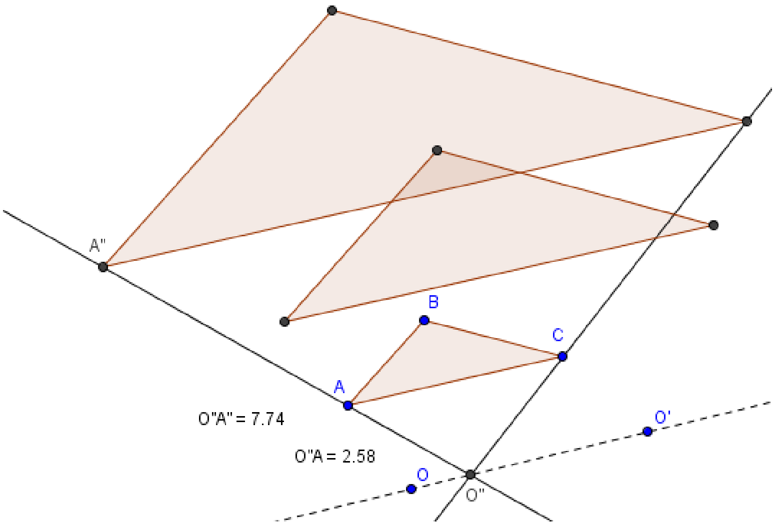


Para determinar el centro de la composición de las dos homotecias, trazamos dos rectas que unan puntos homotéticos del primer y del tercer triángulo; el punto de intersección O'' corresponde al centro de la homotecia composición.



Para hallar la razón k de la homotecia composición, bastará con aplicar la definición de homotecia en la que se cumple la relación:

$$\frac{O''A''}{O''A} = k$$



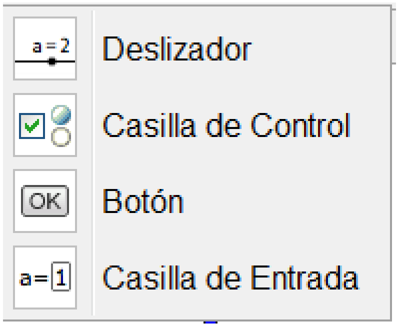
Deslizadores

Podemos decir que un deslizador es una variable que toma distintos valores que se podrá incluir en una construcción, de manera que al variar su valor, las condiciones cambian y por tanto, el resto de objetos se actualizan a los nuevos valores.

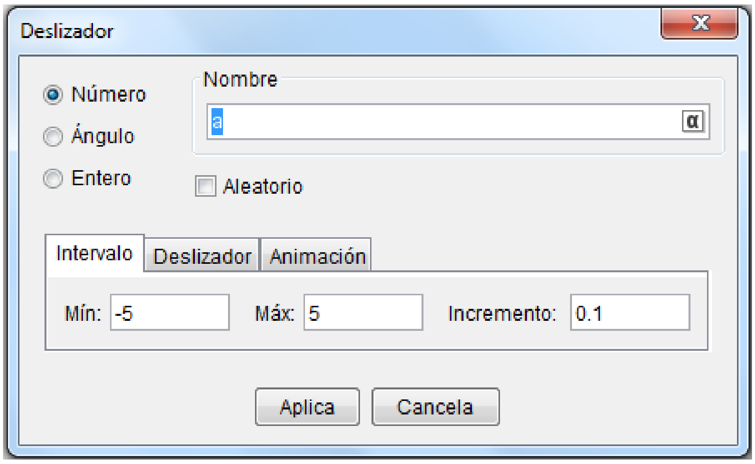
Supongamos que deseamos construir un cuadrado cuyo lado sea variable, por ejemplo, que tome valores de 1 a 5 cm, con incrementos de 0,5 cm.

En este caso, la medida del lado será variable, por lo que necesitamos una herramienta que nos facilite estos cambios de medida.

Esto se consigue con ayuda de la herramienta **Deslizador**  que se encuentra en el bloque de herramientas que hemos denominado **Control**.



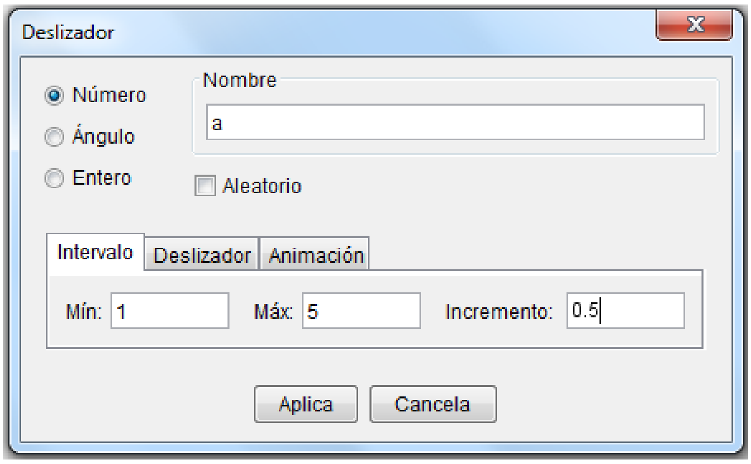
Una vez seleccionada esta herramienta, al pulsar en la vista gráfica, aparecerá el cuadro de diálogo siguiente:



Podemos observar que hay varios tipos de deslizadores: número, ángulo o entero, y que cada deslizador, al igual que todos los objetos en GeoGebra, tendrá un nombre; en este caso, por defecto es a.

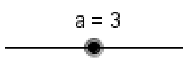
Además, tendrá unos valores asignados: valor inicial (**Mín**), valor final (**Máx**) y el **incremento**.

Podemos dejar el tipo y el nombre, aunque necesitamos modificar los valores para ajustarlo al objetivo que nos hemos planteado. En nuestro caso, el valor mínimo será 1, el máximo es 5 y el incremento será de 0.5.

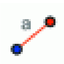


Al pulsar el botón **Aplica**, aparecerá lo siguiente en la vista gráfica.

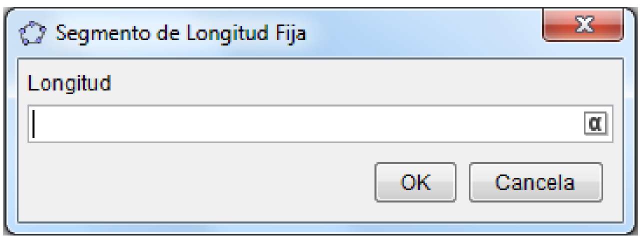
Podemos comprobar que ocurre al desplazar el punto que aparece en el deslizador; observaremos que cambia de valor, pasando por 1.5, 2, 2.5,…, 5, que corresponden a los valores e incremento indicados.



Ya hemos conseguido la variable correspondiente al lado, por lo que el siguiente paso será construirlo.

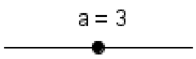
El lado es un segmento, por lo que utilizaremos la herramienta segmento, aunque en esta ocasión recurrimos a **Segmento de longitud dada**  , ya que eso es lo que necesitamos.

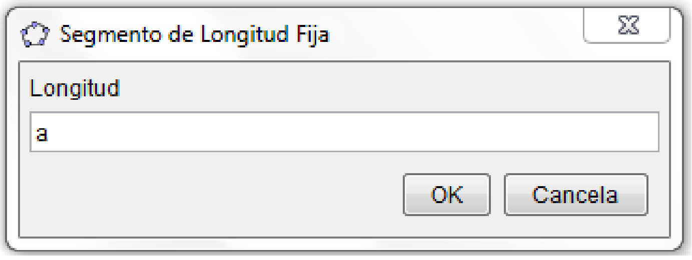
Una vez seleccionada esta herramienta, haremos clic en cualquier parte de la vista gráfica, aparecerá el cuadro de diálogo siguiente:



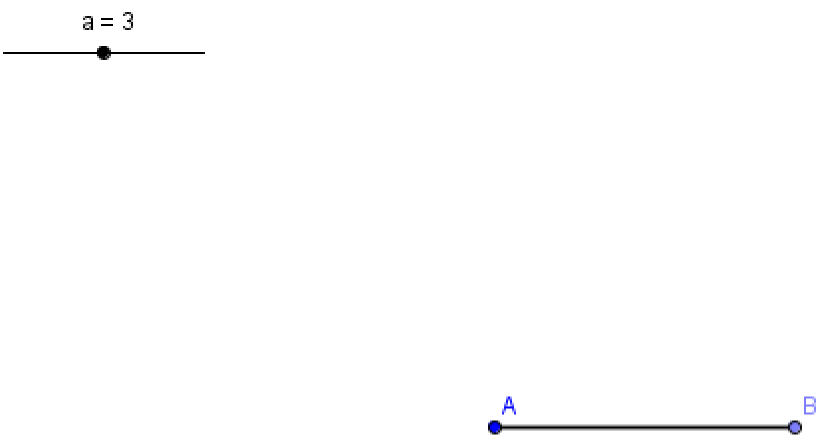
Tenemos que introducir el valor del lado que en nuestro caso corresponde al valor que tenga el deslizador.

Para que el lado vaya cambiando al variar el valor del deslizador, es necesario escribir el nombre del deslizador; en este caso a.





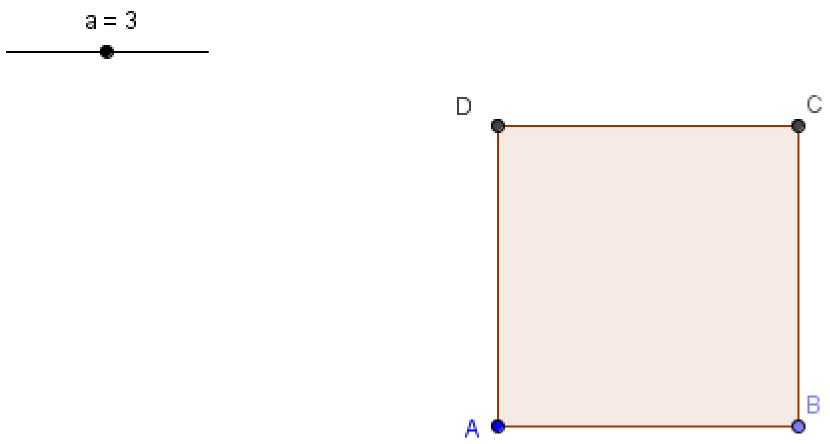
Al pulsar el botón **OK** aparecerá el segmento cuya medida coincide con el valor que en ese momento tenga el deslizador.



Podemos comprobar que al variar el valor del deslizador, el lado se ajusta al correspondiente valor.

Ya solo queda dibujar el cuadrado con ayuda de la herramienta **Polígono regular** cuyo funcionamiento ya conocemos. Seleccionamos la herramienta, marcamos A y B, indicando a continuación 4 como número de lados.

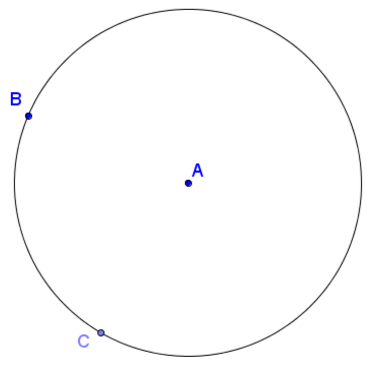
Aparecerá el cuadrado cuyo lado cambiará al mover el modificar el valor del deslizador.



Ejemplo 15. Aproximación área circunferencia

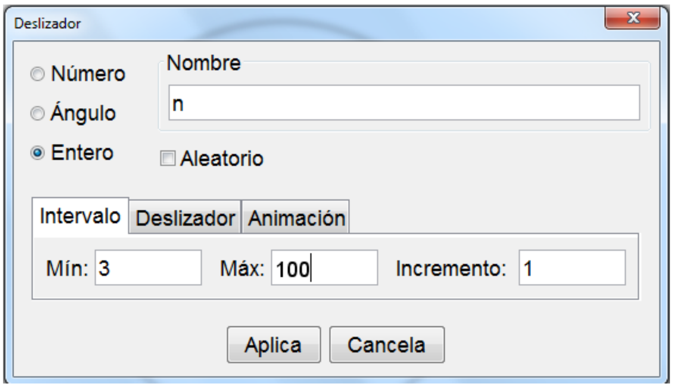
Aproxima el área de la circunferencia mediante polígonos inscritos.

Comenzamos dibujando una circunferencia y un nuevo punto C en la circunferencia.

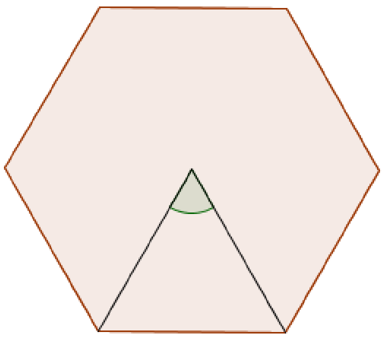


Para no cambiar el tamaño de la circunferencia, ocultamos el punto B.

Deseamos inscribir un polígono cuyo número de lados sea variable, por lo que necesitamos un deslizador que podemos definir del tipo entero, con valores de 3 a 100.

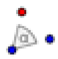


Para inscribir un polígono de un número de lados variable, es necesario determinar un nuevo vértice. Para ello, consideramos cuál es el valor del ángulo central en un polígono de n lados.

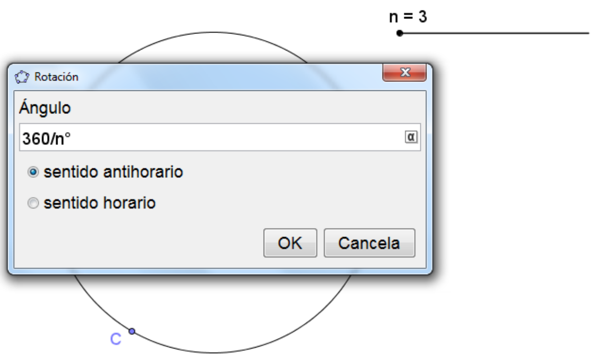


El valor será $\frac{360^\circ}{n}$.

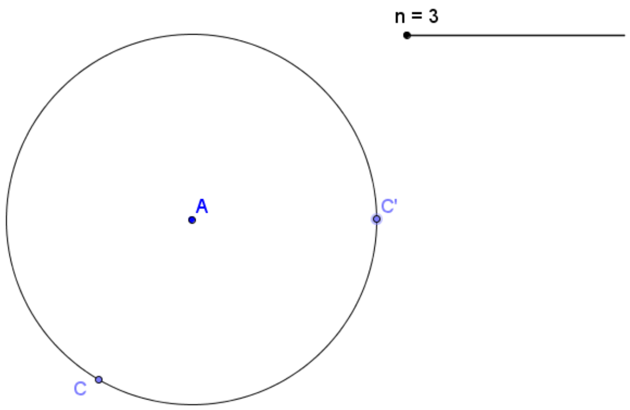
Por tanto, para obtener el vértice que necesitamos, bastará con rotar el punto C alrededor del centro de la circunferencia un ángulo igual al valor anterior.

Utilizamos la herramienta **Rota alrededor de un punto** .

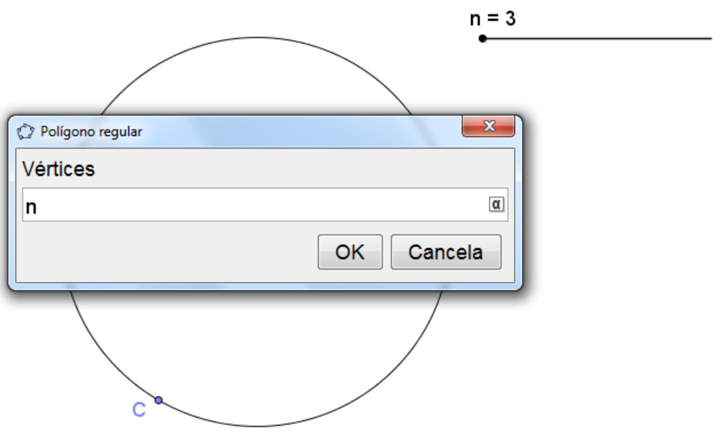
Una vez seleccionada la herramienta, marcamos el punto C, el punto A y escribimos 360/n como valor del ángulo de rotación.



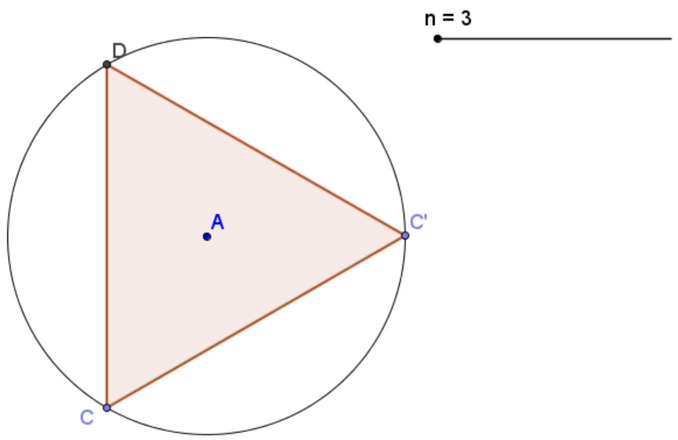
Obtendremos un nuevo punto C’ que será el vértice que necesitamos del polígono inscrito.



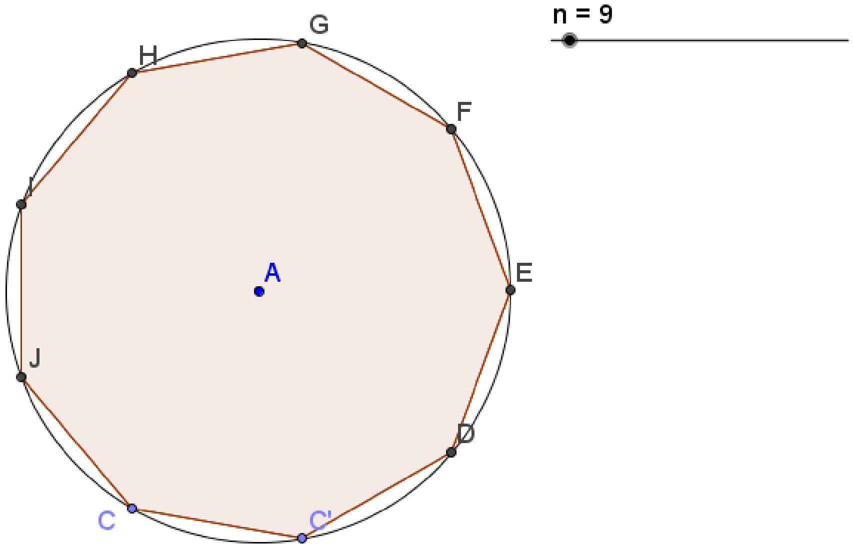
A continuación, seleccionamos la herramienta **Polígono regular** para dibujar el polígono que tiene lado CC’ y el número de lados es la variable n.



El polígono aparece representado en la imagen siguiente:

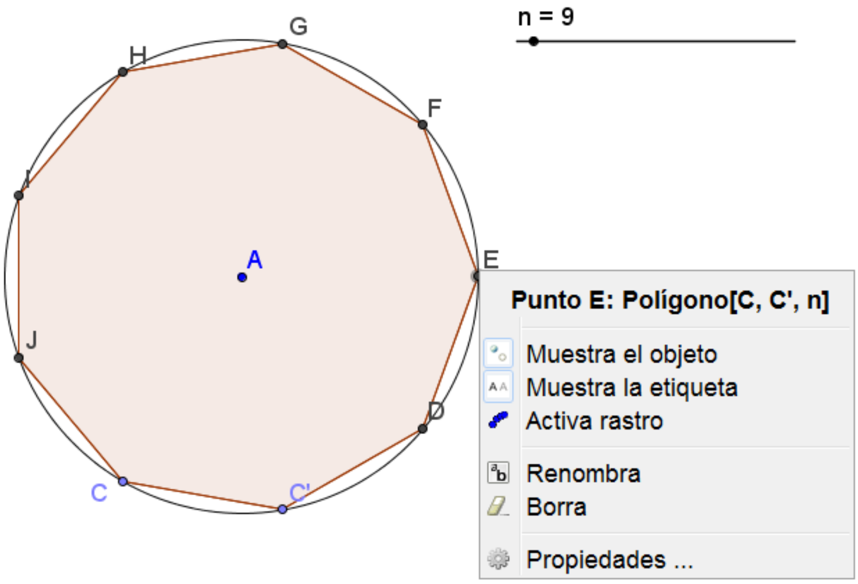


Podemos comprobar que al variar el valor de n en el deslizador, el polígono cambia.

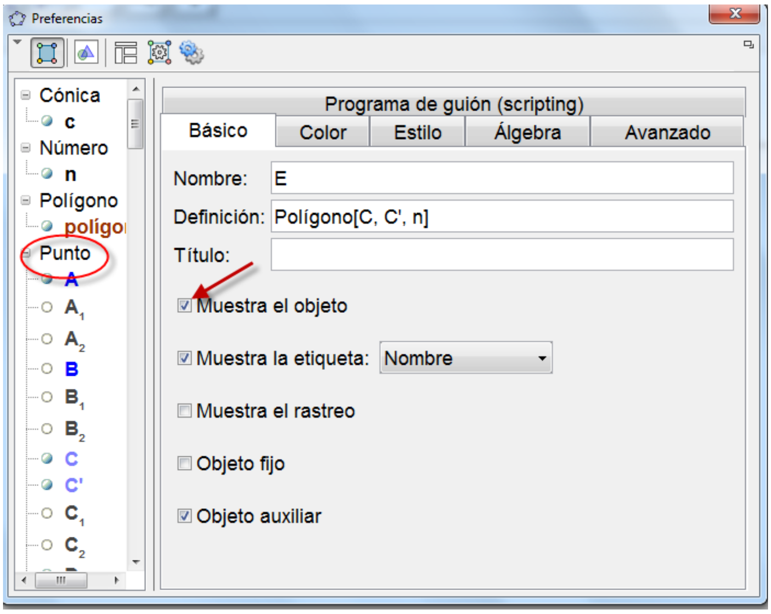


Antes de comparar las áreas de la circunferencia y del polígono, procedemos a cambiar la opción necesaria para que no muestre los nombres de los puntos que aparecerán al cambiar el valor del deslizador.

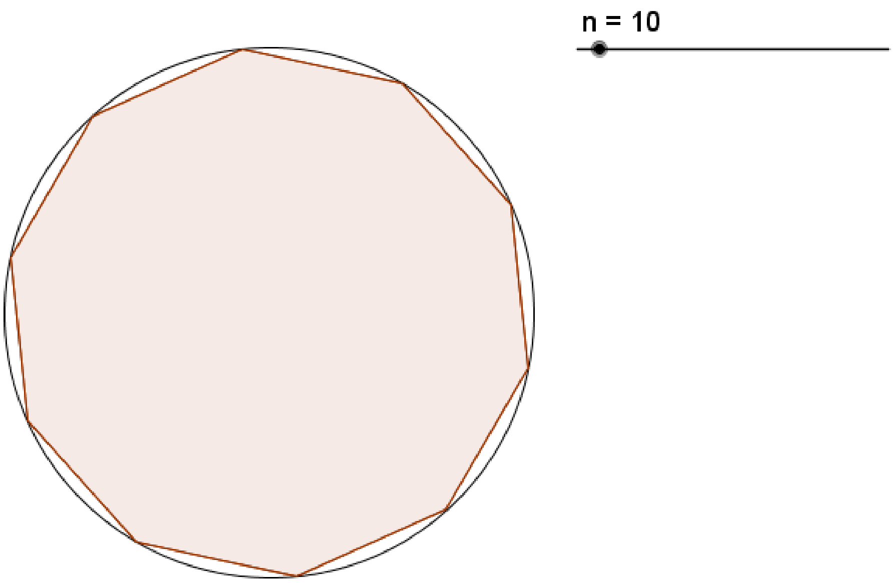
Para ello, pulsamos el botón derecho sobre un punto cualquiera.



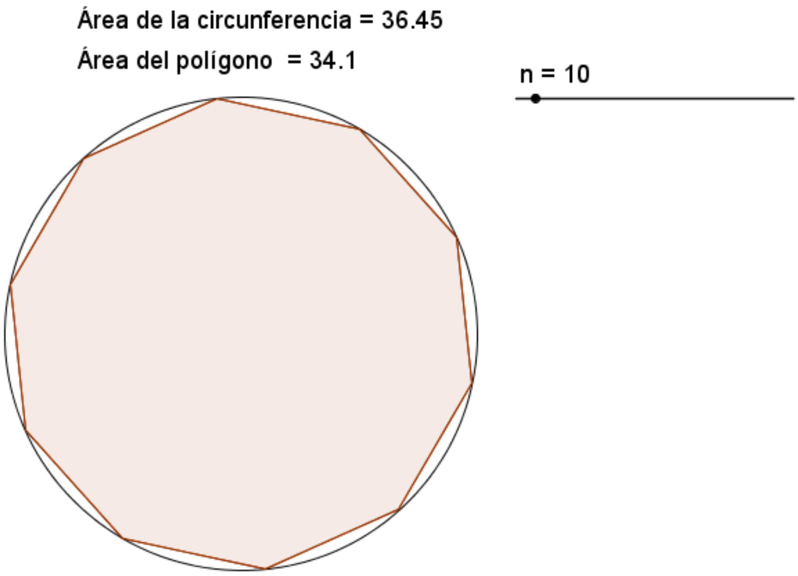
Marcamos la opción correspondiente al tipo de objeto que deseamos modificar; en este caso **Punto** y desmarcamos la opción **Muestra el objeto**.



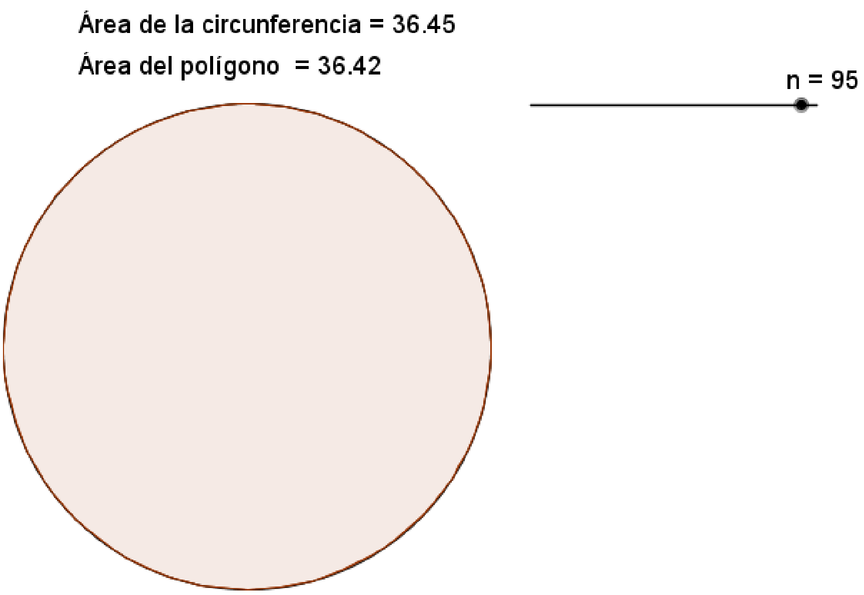
Podemos comprobar que al cambiar el valor del deslizador ya no aparecen los nombres de los puntos correspondientes a los vértices.



A continuación, obtenemos el área de la circunferencia y el área del polígono, utilizando la herramienta **Área** .



Ya solo nos queda aumentar el número de lados del polígono para comprobar que los dos valores se aproximan.



Lugares geométricos

Para construir un lugar geométrico necesitaremos dos objetos: un punto que será el que describirá el lugar geométrico, y otro que será el punto que se mueve y hace que las condiciones cambien, y por tanto, exista un lugar geométrico.

Evidentemente, el objeto que se mueve no debe hacerlo libremente por el plano, se moverá sobre otro objeto del cual tendrá dependencia.

Para trazar un lugar geométrico, una vez seleccionada la herramienta **Lugar**, tendremos que marcar el punto que describirá el lugar y el punto que se mueve para describir el lugar. Es decir, respondemos a la pregunta: "¿Qué lugar geométrico describe el punto P cuando se mueve el punto A sobre el objeto C?"

Ejemplo 16

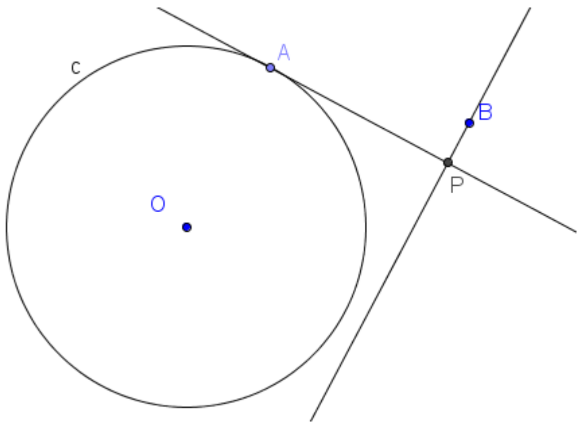
Para un punto A de una circunferencia y un punto exterior B, sea P el punto de intersección de la recta tangente a la circunferencia por el punto A y de la recta perpendicular a la tangente anterior trazada por el punto B.

Hallar el lugar geométrico del punto P cuando A recorre la circunferencia.

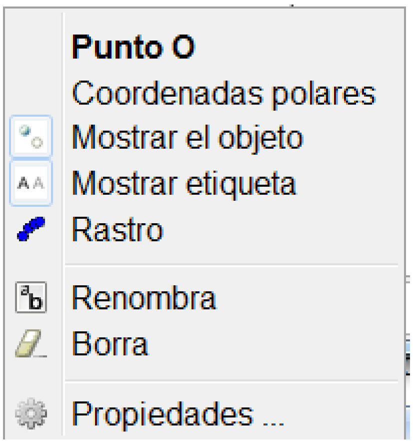
Determinar el lugar geométrico que resultará cuando B sea un punto situado en la circunferencia, o cuando sea el centro de la circunferencia.

Una vez dibujados los elementos necesarios: circunferencia, punto A y punto B, trazamos la recta tangente a la circunferencia por el punto A, que debe cumplir la condición de perpendicularidad con el radio trazado por el punto A.

A continuación, trazamos la recta perpendicular a la tangente anterior por el punto B. Creamos el punto P como punto de intersección de las dos rectas anteriores, para ello será necesario utilizar la herramienta Intersección de dos objetos.

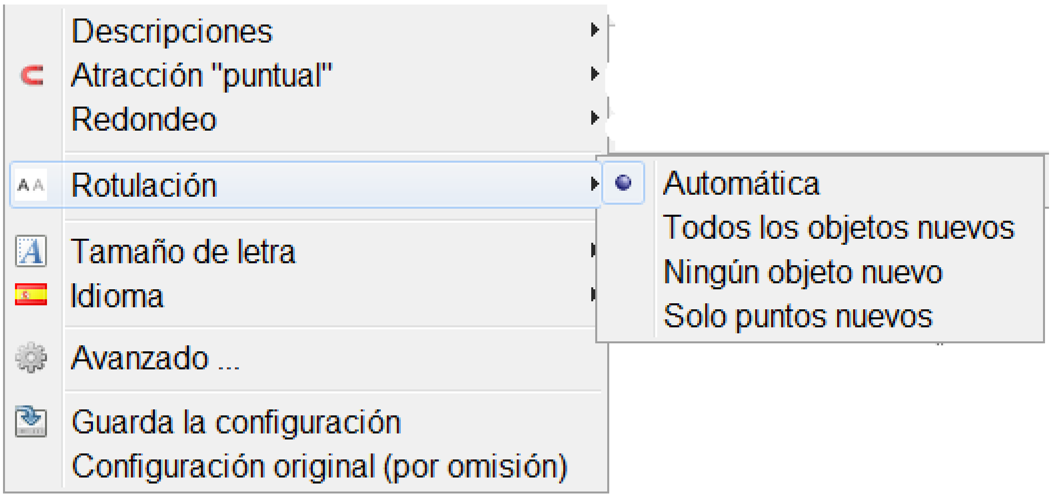


Para cambiar los nombres a los objetos podemos situarnos sobre él y, al pulsar el botón derecho del ratón aparecerá el siguiente menú de opciones:

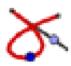


Al seleccionar **Renombra** aparecerá un cuadro para incluir el nuevo nombre que se le asigna al objeto.

Como alternativa a las opciones anteriores, se puede seleccionar la opción **Ningún objeto nuevo** que aparece al abrir **Rotulado** en el menú **Opciones**, para que no asigne nombre a los nuevos objetos que es la opción por defecto.

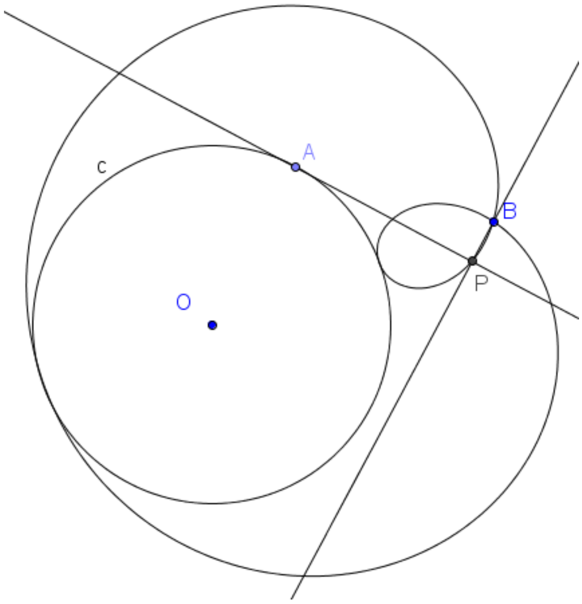


Para obtener el lugar geométrico descrito por el punto P cuando A recorre la circunferencia baste seleccionar la herramienta **Lugar**.



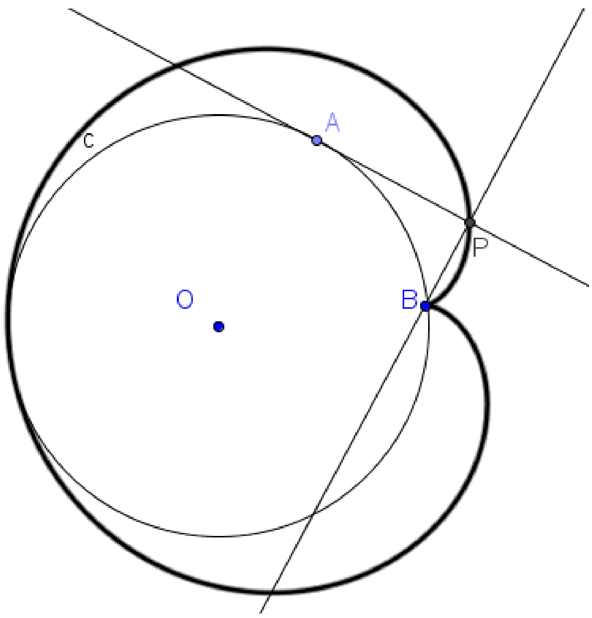
Pulsando a continuación, sobre el punto P, que describe el lugar, y sobre el punto A que se mueve sobre la circunferencia.

Aparecerá la curva representada en la figura siguiente, denominada caracol de Pascal.



Como el lugar geométrico se actualiza de manera automática al cambiar las condiciones, bastará con mover el punto B y acercarlo a la circunferencia o bien llevarlo hasta coincidir con el centro para obtener los correspondientes lugares.

Cuando B es un punto de la circunferencia, la curva obtenida como lugar geométrico se denomina cardioide.



Ejemplo 17

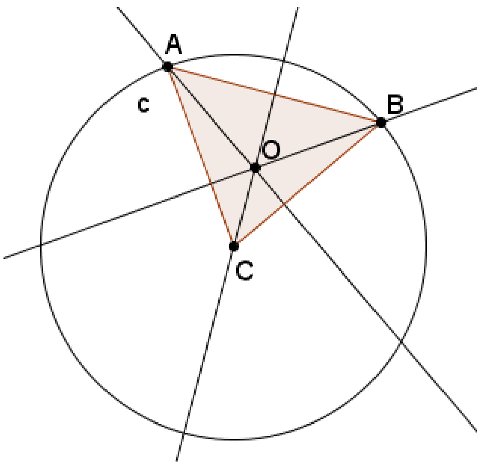
Dada una circunferencia y un triángulo ABC, siendo A y B puntos de la circunferencia y C el centro, hallar el lugar geométrico del ortocentro cuando el punto B recorre la circunferencia.

Comprobad si el lugar geométrico depende de la posición en la que se encuentre el punto A.

Para realizar esta construcción, dibujamos en primer lugar la circunferencia y marcamos sobre ella los puntos A y B.

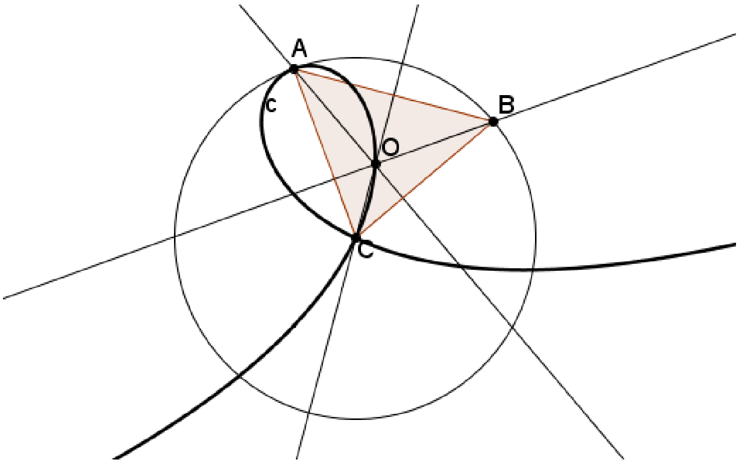
Utilizando la herramienta **Segmento**, definimos el triángulo que tiene por vértices los puntos A, B y C, siendo C el centro de la circunferencia.

A continuación, determinamos el ortocentro al que colocamos la etiqueta O.



Utilizando la herramienta **Lugar** obtenemos el lugar geométrico descrito por el ortocentro O cuando el punto B recorre la circunferencia.

Obtenemos la curva representada en la figura siguiente:



Ejemplo 18

Sea A un punto interior de una circunferencia c.

Halla el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por el punto A que son tangentes a la circunferencia c.

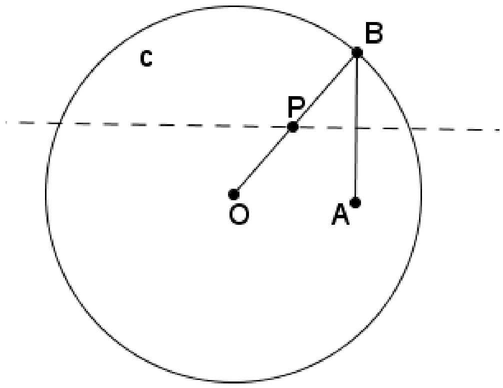
¿Qué ocurre cuando el punto A es exterior a la circunferencia?

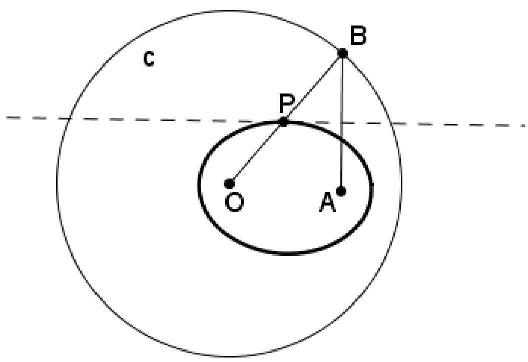
Después de trazar la circunferencia c, definimos un punto B perteneciente a c y un punto A interior.

Para dibujar la circunferencia que pasa por el punto A, que es tangente en el punto B a la circunferencia c, necesitamos encontrar su centro.

El centro, que llamamos P, será el punto de intersección de la mediatriz del segmento AB con el segmento OB siendo O el centro de la circunferencia c.

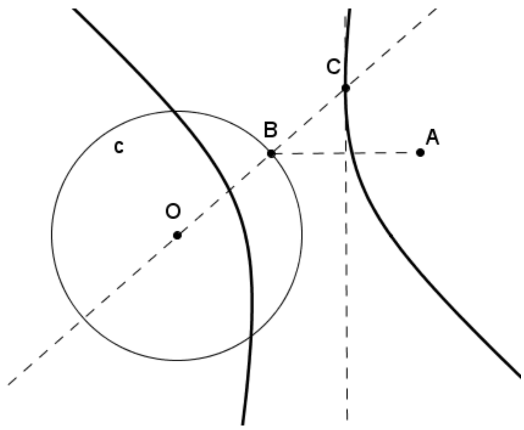
Para trazar el lugar geométrico debemos seleccionar la correspondiente herramienta, y señalar a continuación el punto P y el punto B.





El lugar geométrico representa una elipse cuyos focos son los puntos O y A.

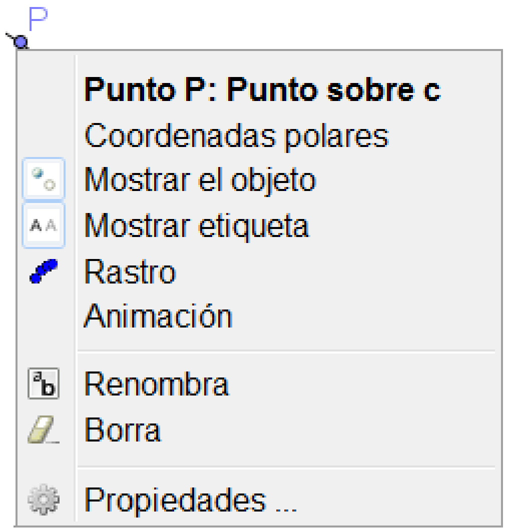
Para responder a la última cuestión bastará con mover el punto A para que cumpla la condición de exterior a la circunferencia. En este caso, la cónica cambiará y el lugar geométrico será una hipérbola.



Rastro de un objeto

Como alternativa a la opción **Lugar** por la cual se obtiene el lugar geométrico descrito por un punto, se podrá utilizar **Rastro** para obtener el lugar recorrido por cualquier objeto de una construcción.

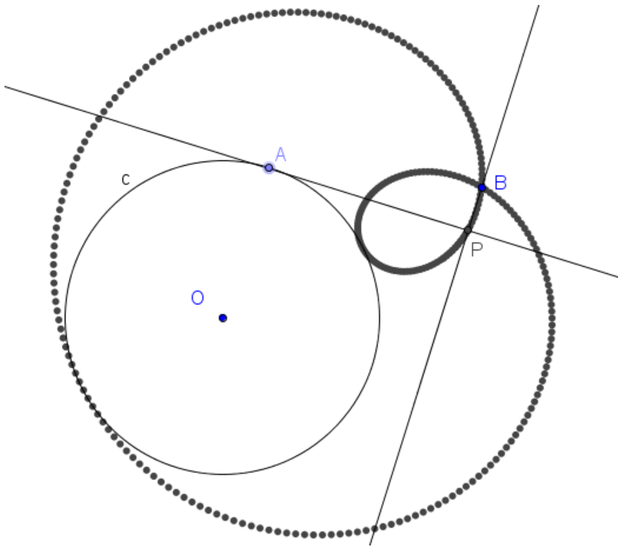
Para activar el rastro de un objeto, hay que seleccionarlo y pulsar, a continuación, el botón derecho del ratón. Aparecerá el siguiente menú de opciones:



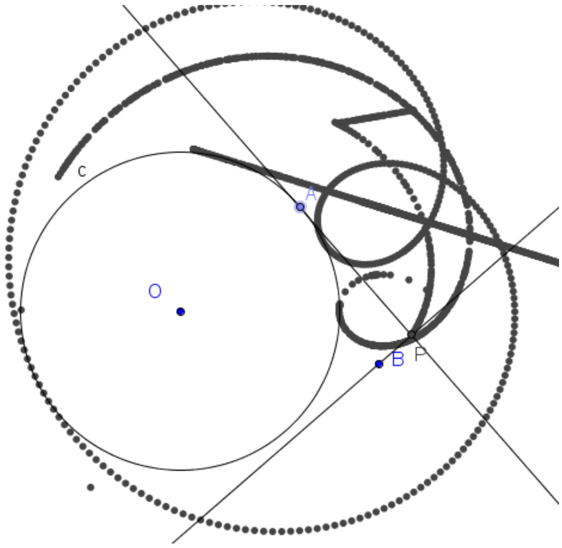
El resultado obtenido con la herramienta **Lugar** es un objeto que reconoce GeoGebra y por tanto, se actualiza al cambiar las condiciones iniciales.

No ocurre lo mismo con el resultado que aparece al utilizar la opción de activación del rastro.

Si en el ejemplo anterior, una vez borrado el lugar geométrico, procedemos a activar el rastro del punto P, animando a continuación, el punto A, el resultado será una imagen similar a la obtenida anteriormente.

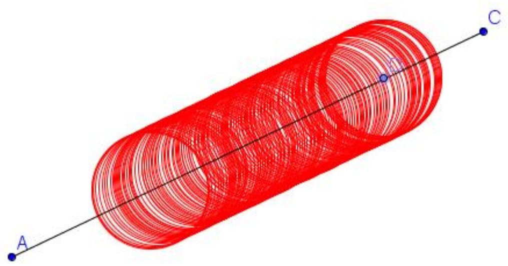


Mientras que con la herramienta **Lugar** el resultado es un objeto dinámico que se actualizará al cambiar las condiciones iniciales, con el rastro solo se obtiene un trazo que se deforma al mover los objetos de la construcción, como podemos observar en la imagen siguiente:



Al pulsar la combinación de teclas **Ctrl**-**F** desaparecerán los rastros que la vista gráfica contiene, aunque no se desactivan los rastros en los objetos que los tengan activados.

Sin embargo, con la herramienta lugar solo se puede obtener el lugar geométrico de puntos, mientras que con rastro se puede obtener o mejor dicho, simular, el lugar descrito por cualquier objeto, como muestra la imagen siguiente en la que aparece el rastro de una circunferencia de radio fijo al mover el centro sobre un segmento.



Realicemos el siguiente ejemplo para obtener un nuevo lugar.

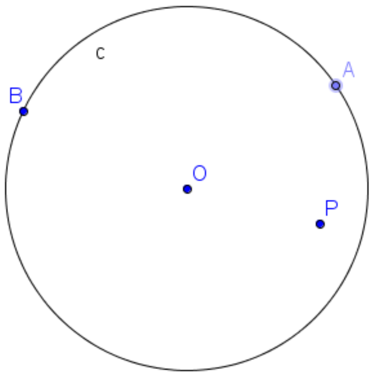
Ejemplo 19

Dada una circunferencia y un punto P interior, que no sea el centro. Sea A un punto cualquiera de la circunferencia y r la recta perpendicular al segmento PA por el punto A.

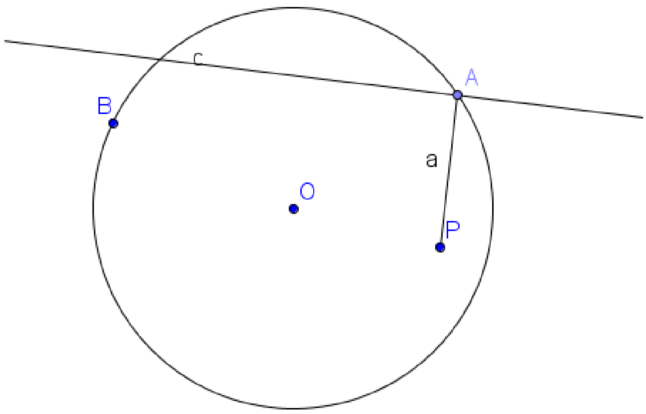
Hallar el lugar geométrico que determina la recta r cuando A recorre la circunferencia.

Averigua qué pasa cuando el punto P es exterior a la circunferencia.

Al igual que en ejemplos anteriores, comenzamos creando los objetos iniciales: circunferencia y los puntos A en la circunferencia y P distinto del centro.



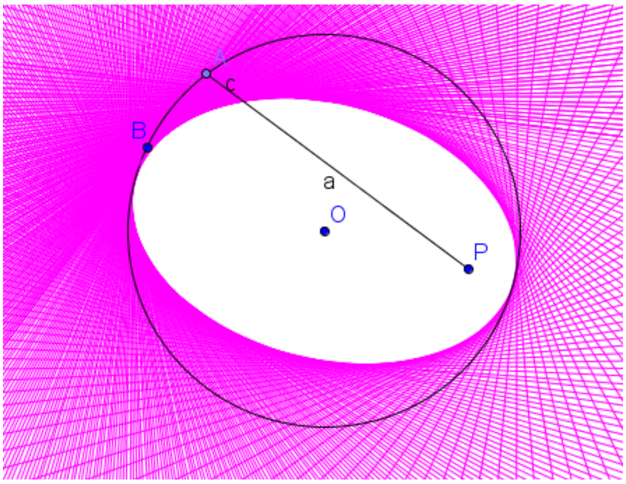
A continuación trazamos el segmento AP y la recta perpendicular por el punto A.



Antes de activar el rastro de la recta perpendicular, modificamos su estilo para cambiar el color.

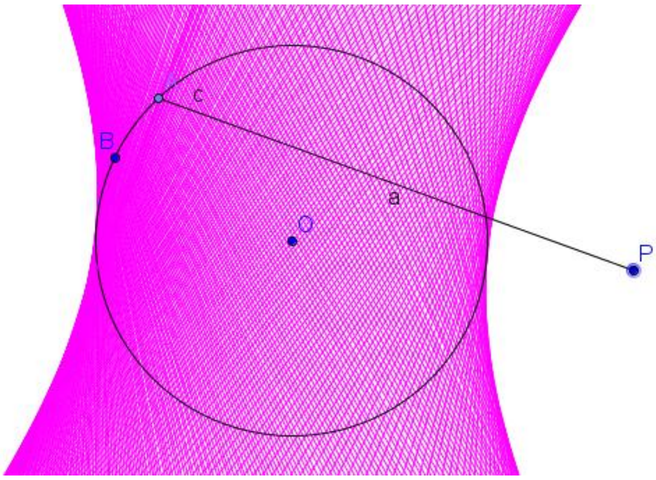
Como deseamos obtener el lugar geométrico de una recta, no es posible utilizar la herramienta **Lugar** que solo se puede aplicar sobre puntos. Por tanto, la alternativa será activar el rastro de la recta y posteriormente, mover el punto A de forma manual o activando la animación automática.

El resultado será una elipse obtenida como envolventes.



Para comprobar qué ocurre cuando P es exterior a la circunferencia, movemos el punto P, pulsando las teclas **Ctrl-F** antes de volver a pulsar sobre ▷ para iniciar la animación.

El resultado del nuevo lugar aparece en la imagen siguiente:



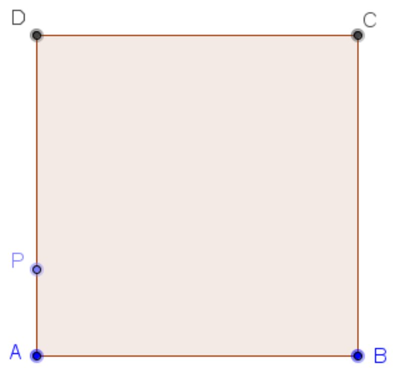
Una vez obtenidas la elipse y la hipérbola ¿cómo se podrá obtener la parábola con un método similar?

Ejemplo 20

A partir de un cuadrado, inscribe un nuevo cuadrado, cuyo lado sea variable, en el que incruste una imagen, de manera que al cambiar el tamaño de este segundo cuadrado, la imagen se ajuste al tamaño.

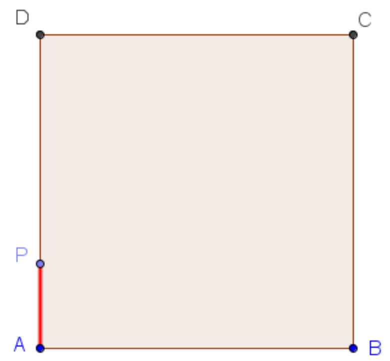
Describimos los pasos que tenemos que realizar para obtener esta construcción.

En primer lugar, dibujamos el cuadrado exterior utilizando la herramienta **Polígono regular**, situando a continuación un punto en uno de sus lados.



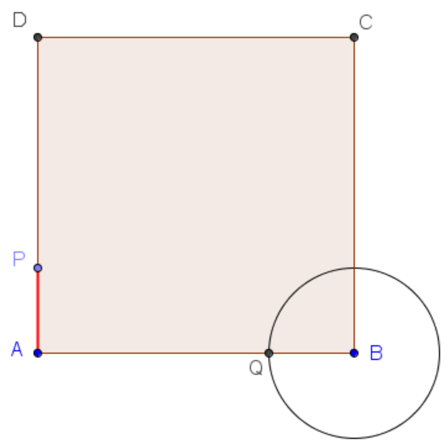
La dificultad está en obtener el cuadrado inscrito; del que tenemos que pensar que la distancia PA s tiene que mantener en cada uno de los otros tres vértices.

Por tanto, podemos definir el segmento PA utilizando la herramienta **Segmento** para posteriormente utilizarlo con la herramienta **Compás**.

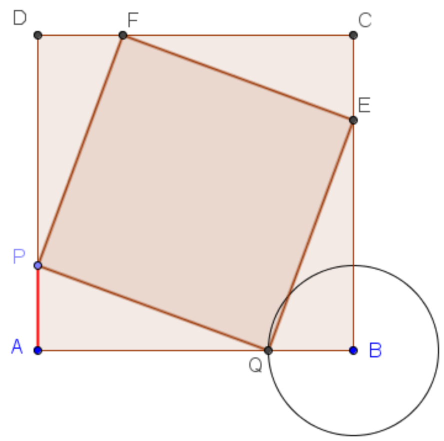


Una vez creado el segmento hemos modificado su color y su grosor para que destaque.

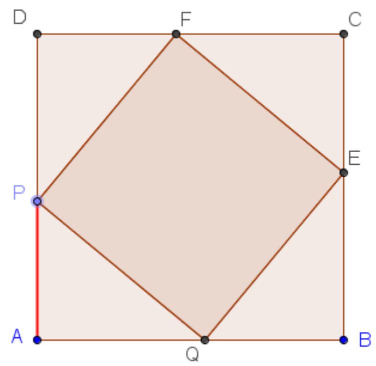
Ahora, con la herramienta **Compás** llevamos esta medida al vértice B, obteniendo el punto Q de intersección de la circunferencia con el lado AB.



El segmento PQ es el lado del cuadrado inscrito que crearemos utilizando de nuevo la herramienta **Polígono regular**.

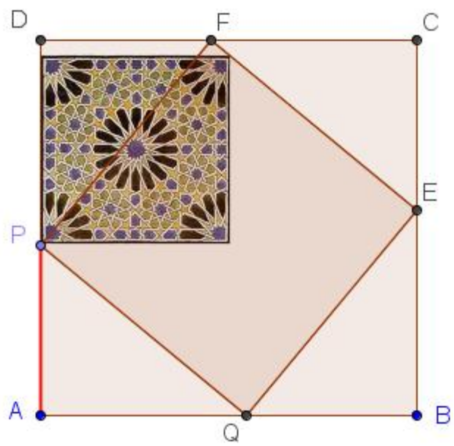


A continuación, ocultamos la circunferencia y ya solo nos queda comprobar que al mover P, el cuadrado va cambiando pero siempre mantendrá su condición de inscrito.



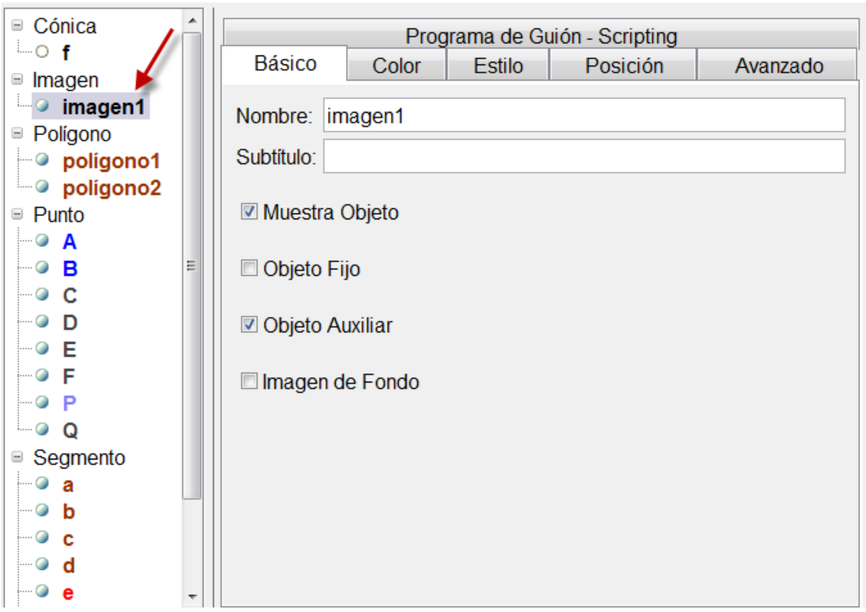
Ahora toca incrustar la imagen en este cuadrado. Para ello, seleccionamos la herramienta **Imagen**, estableciendo el punto P como punto en el que se situará la imagen.

Ocurrirá algo similar a lo que aparece en la imagen siguiente.

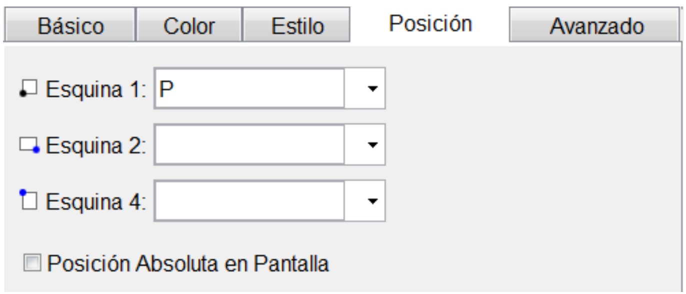


Ya solo queda ajustar la posición de la imagen para relacionarla con los otros vértices del cuadrado inscrito.

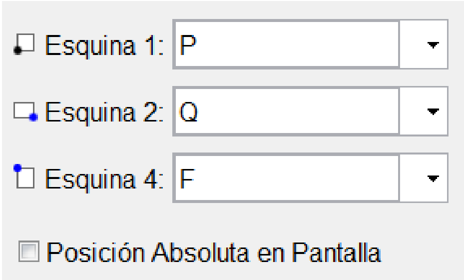
Como se trata de cambiar sus propiedades, hay que hacer clic sobre la imagen con el botón derecho para acceder a **Propiedades** o sobre cualquier objeto, seleccionando a continuación la imagen en la relación de objetos que intervienen en la construcción.



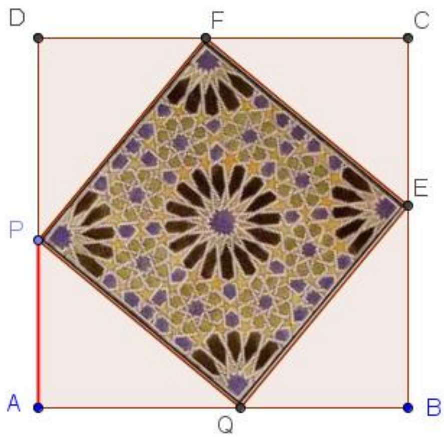
Abrimos la pestaña Posición para que aparezcan las tres esquinas que tenemos que indicar para fijar y por tanto, relacionar la imagen con los vértices de cuadrado.



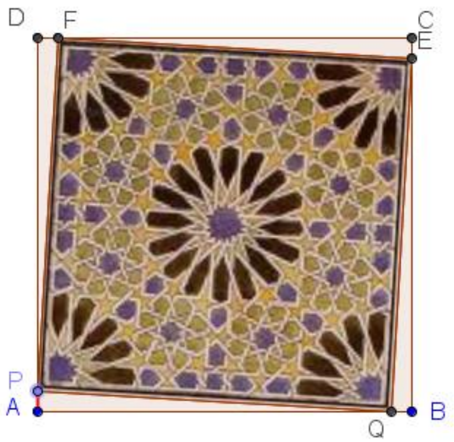
Podemos guiarnos por las imágenes que aparecen junto a cada esquina en la ventana anterior, para indicar que la segunda esquina será el punto P y la cuarta será el punto E.



El resultado será el que muestra la siguiente imagen.



En la construcción, al mover P, la imagen se irá adaptando al tamaño den cuadrado inscrito.

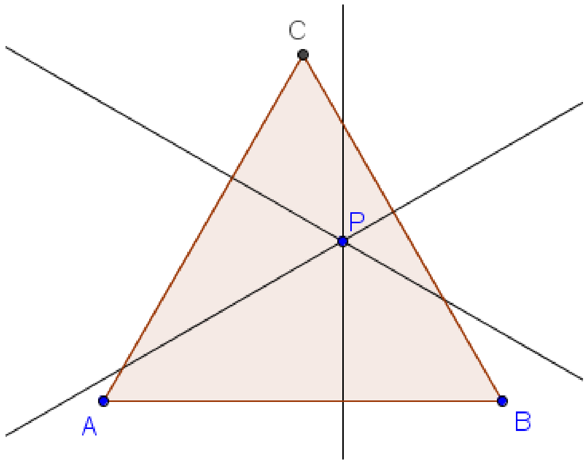


Ejemplo 21. Teorema de Viviani

En un triángulo equilátero la suma de las distancias de un punto interior a los lados es constante.

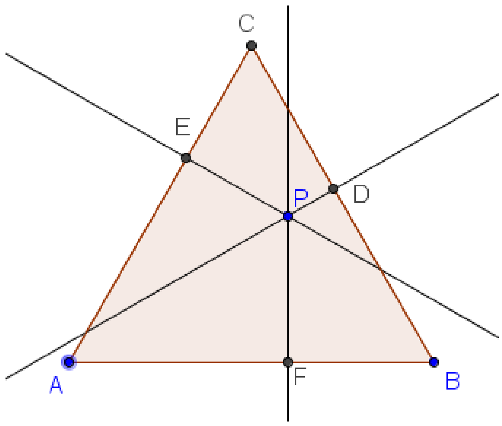
Para comprobar que este teorema se cumple, comenzamos dibujando un triángulo equilátero y un punto interior P.

A continuación, con ayuda de la herramienta **Perpendicular** trazamos las rectas perpendiculares a cada lado que pasan por P.

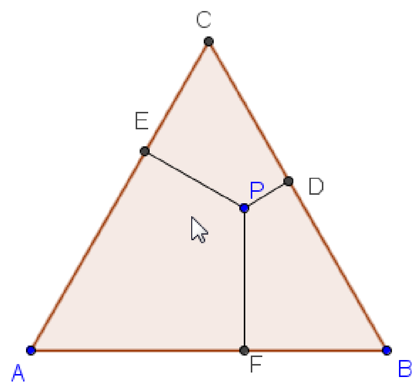


La distancia a cada lado quedará fijada por el punto de intersección de cada una de estas rectas con su respectivo lado.

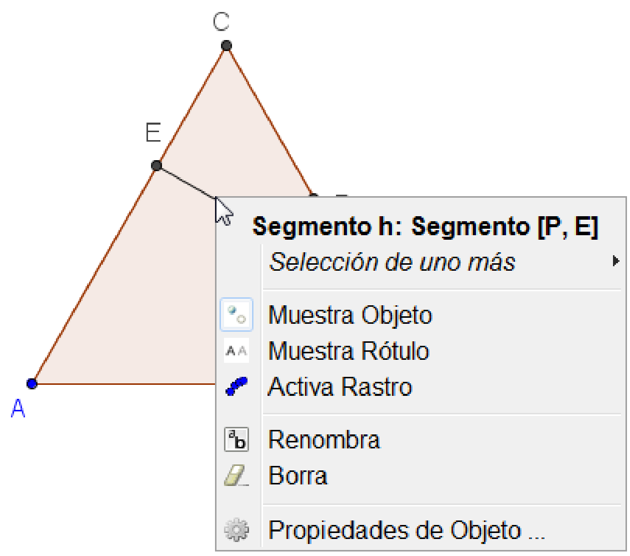
Utilizando **Intersección** encontramos cada uno de los puntos.

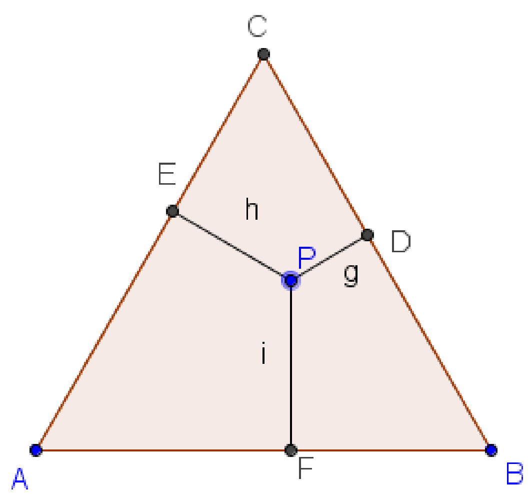


Las tres distancias serán los segmentos PD, PE y PF que definimos como segmentos, ocultando previamente las tres rectas.



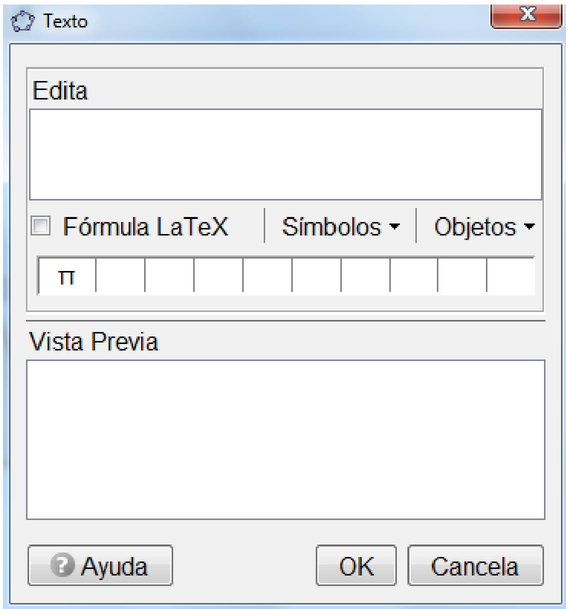
A continuación, tenemos que obtener la suma de estos tres segmentos; a los que previamente haremos que aparezca su nombre, pulsando el botón derecho sobre cada uno de ellos para que aparezca la opción **Muestra Rótulo**.





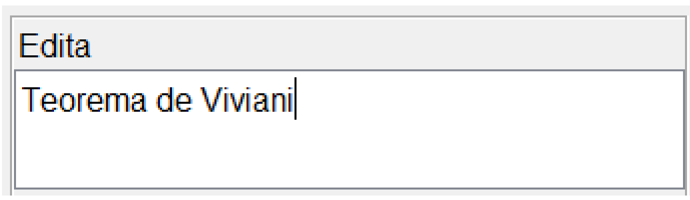
La suma de los tres segmentos la obtendremos y expondremos en la vista gráfica con ayuda de la herramienta **Texto** ABC .

Una vez seleccionada esta herramienta, haremos clic (botón izquierdo) en cualquier parte libre de la vista gráfica. Aparecerá la siguiente ventana para introducir el texto.

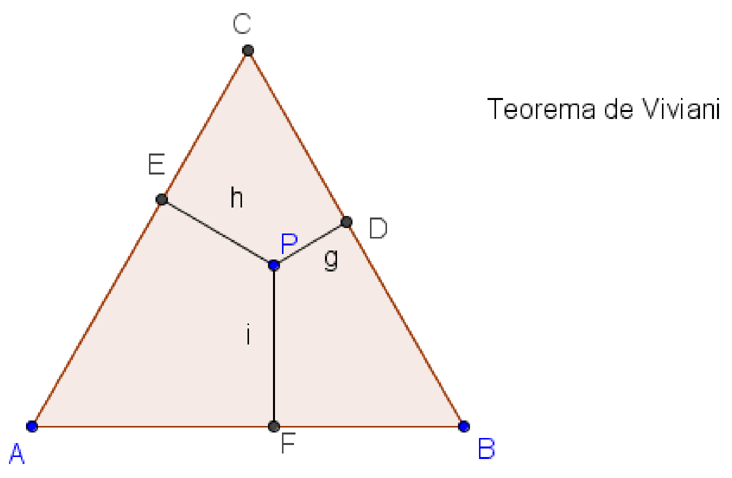


Cualquier texto que se escriba debajo de **Edita** aparecerá en la **Vista gráfica** al pulsar el botón **OK**.

Por ejemplo, escribimos el nombre del teorema que estamos comprobando.

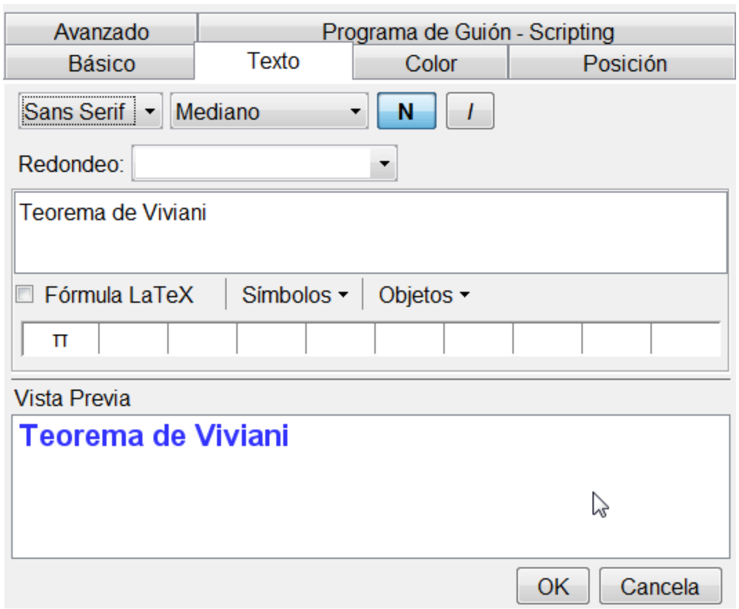


La vista gráfica presentará el siguiente aspecto.

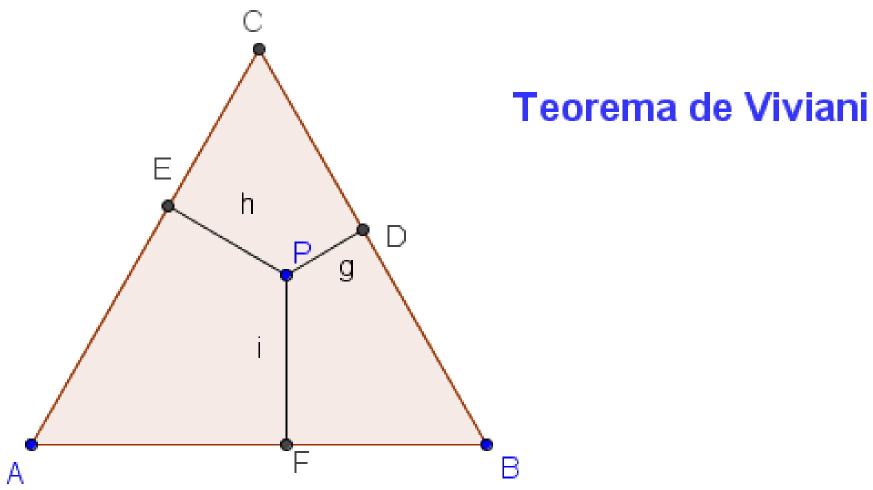


Las características de este texto, al igual que las de cualquier objeto que interviene en una construcción, se podrán modificar utilizando la opción Propiedades de objeto que aparece al pulsar el botón derecho sobre él.

Por ejemplo, podemos modificar su tamaño y color, a partir de las pestañas **Texto** y **Color**, respectivamente.



El aspecto, una vez realizados los cambios será el que muestra la imagen siguiente:



También, se pueden modificar las características del texto utilizando las opciones que aparecen en la parte superior de la vista gráfica.

Este texto podemos decir que es un texto estático ya que no depende de ningún valor y por tanto, no cambiará al modificar la posición de los objetos que intervienen en la construcción.

Sin embargo, los segmentos cambian su medida al variar la posición del punto P, por lo que vamos a exponer como introducir un texto, en este caso, dinámico.

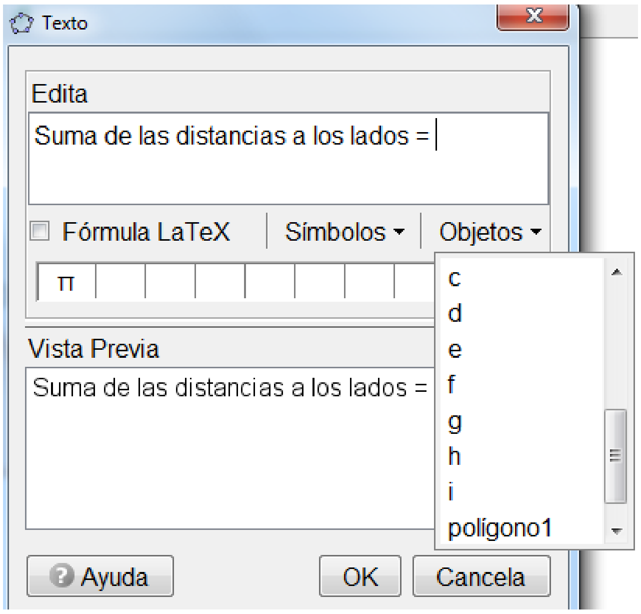
Seleccionamos de nuevo la herramienta **Texto**, pulsando en una zona libre de la vista gráfica, para que aparezca la ventana ya conocida.

Escribimos en **Edita** el texto *Suma de las distancias a los lados* =.

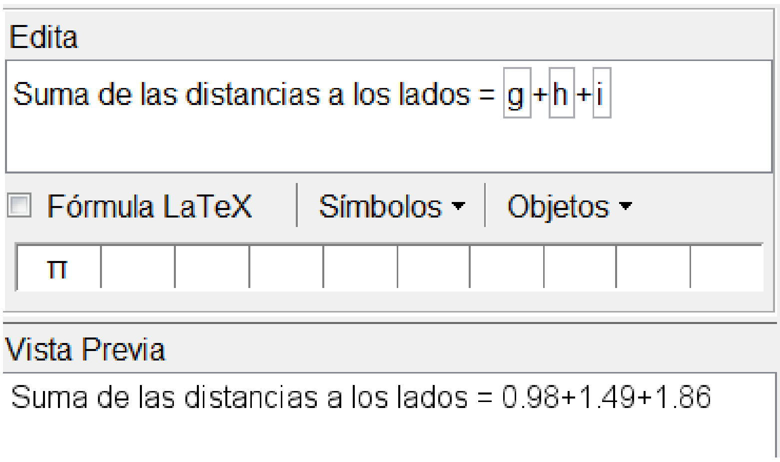
Ahora deseamos que aparezcan las distancias de P a los lados del triángulo que en la construcción se denominan g, h, i.

Si escribimos los caracteres g, h e i, estaremos introduciendo de nuevo texto estático que no se actualizará al cambiar su medida.

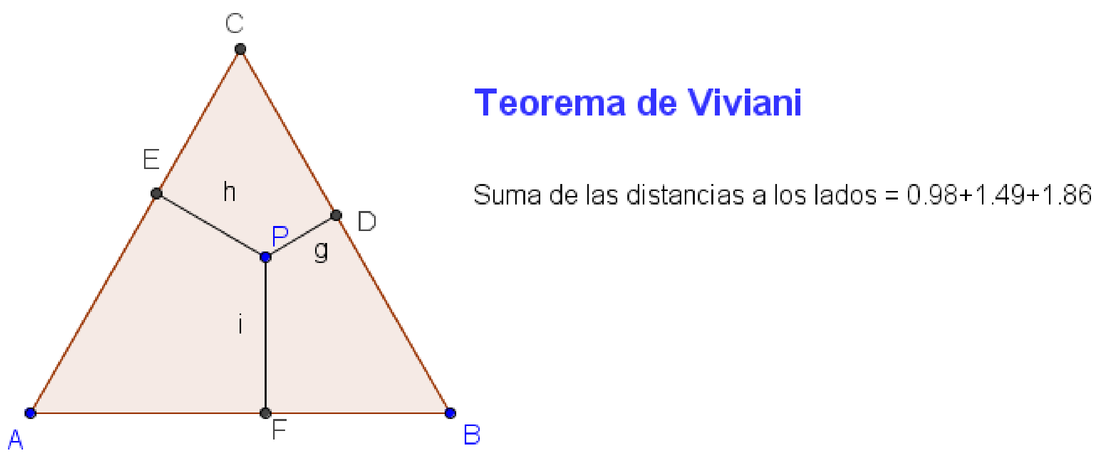
Para lograr que GeoGebra sustituya estos caracteres por sus respectivos valores, debemos seleccionarlos desde la pestaña **Objetos**.



Seleccionamos el primer segmento g, escribimos el signo +, seleccionamos el segundo segmento h, escribimos + y de nuevo, seleccionamos i. Los caracteres se muestran encerrados en un rectángulo y sus valores aparecerán en la **Vista previa.**



El texto aparece en la vista gráfica y se actualizará al mover el punto P.

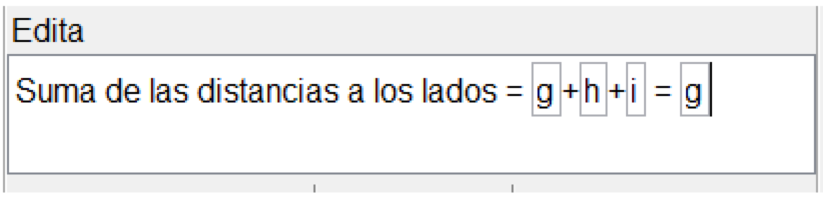


Ya solo nos queda obtener el valor de la suma de los valores g, h e i, de manera que la suma también sea dinámica.

Para modificar el texto que acabamos de introducir, hacemos un doble clic sobre él para que aparezca de nuevo la ventana anterior.

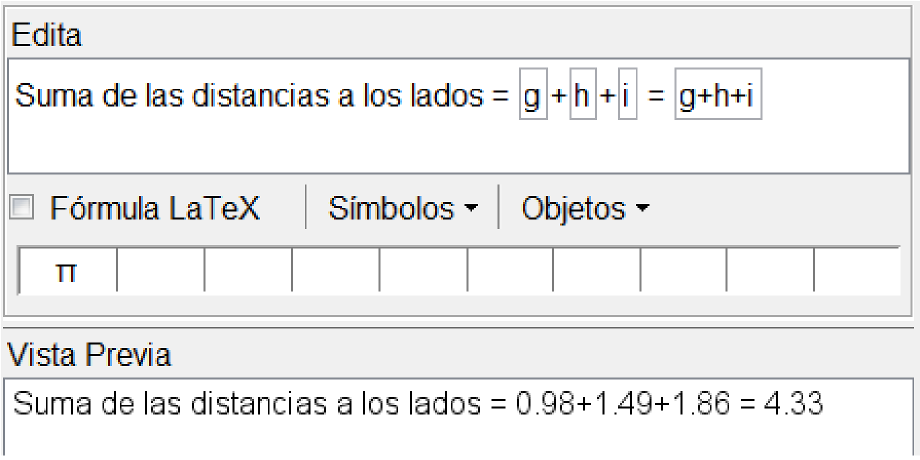
Escribimos el signo = al final del texto que ya teníamos y pulsamos de nuevo sobre g en la pestaña objetos.

Tendremos algo similar a lo que aparece en la imagen siguiente:

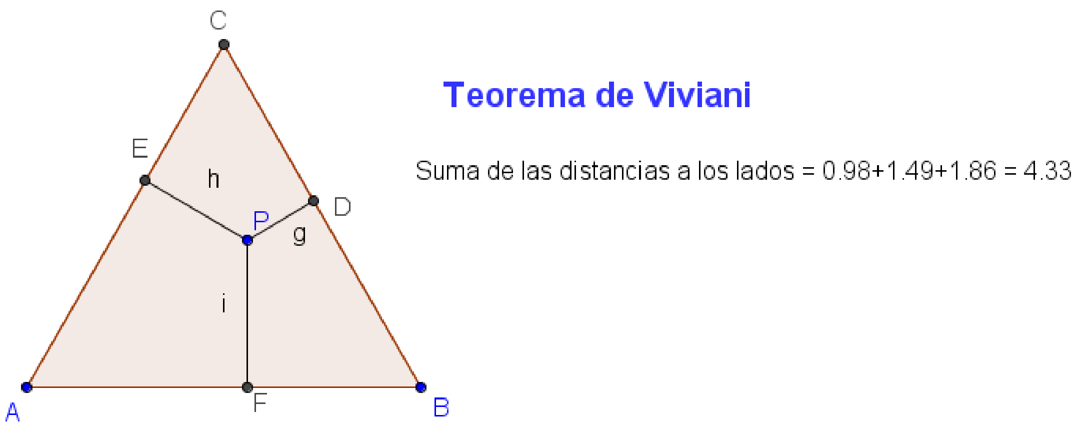


Situamos el cursor dentro del último cuadro, justo detrás de g y escribimos +h+i (introducimos estos caracteres desde teclado, no desde **Objetos**).

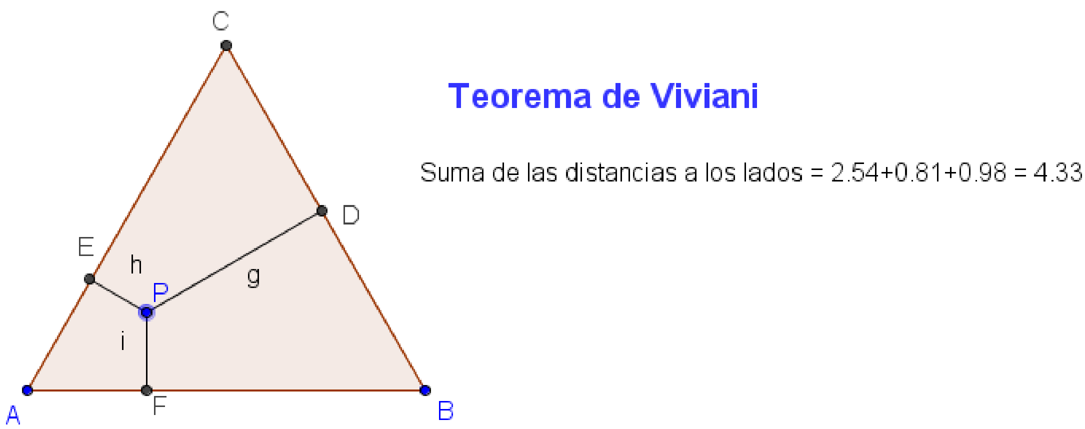
El aspecto será el siguiente:



Observamos que ha sustituido el valor de g+h+i por su suma tal y como deseábamos.



Ya solo nos queda mover el punto P para comprobar que a pesar de que las longitudes de los segmentos cambian, la suma se mantiene constante.



Este valor constante coincide con la altura del triángulo ya que cuando P es un vértice del triángulo, la suma de las distancias a los lados es la altura.

Podemos finalizar la comprobación trazando y midiendo la altura.

Dependiendo del nivel de los alumnos a los que propongamos esta actividad podemos plantear el tipo de actividad para que no solo sea comprobar, sino también que intenten averiguar cuál es el valor de la constante.

Actividades propuestas II

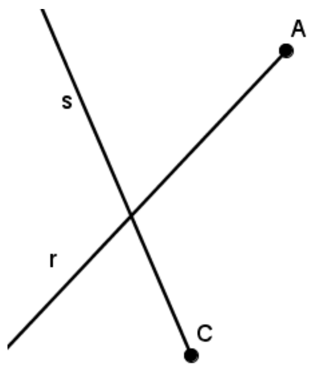
1. Una vez construida la circunferencia circunscrita a un triángulo *ABC*, aprovechando las características del programa para mover los objetos iniciales, y mantener las relaciones y distancias, investigar las cuestiones siguientes:
    a. ¿Qué condiciones o qué tipo de triángulo hará que el circuncentro sea un punto interior al triángulo?
    b. ¿Cuándo el circuncentro será un punto exterior al triángulo?
    c. ¿Cuándo estará el circuncentro sobre el perímetro del triángulo?
    d. ¿Hay algún triángulo en el que el circuncentro sea uno de sus vértices?
2. En un triángulo *ABC*, dibujar la circunferencia inscrita.
3. Transformar un polígono en un polígono de un lado más e igual área.
4. A partir de un triángulo *ABC* cualquiera, construir un triángulo rectángulo y un triángulo isósceles con el mismo área que el triángulo *ABC*.

5. Sobre dos semirrectas con el mismo origen *A*, construir una circunferencia tangente a ellas.

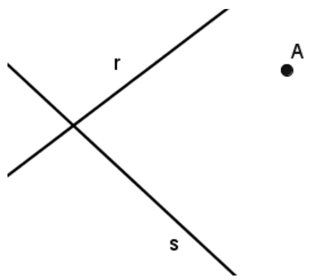
6. Teorema de Ceva. Si AX, BY y CZ son tres cevianas concurrentes de un triángulo ABC, entonces $\frac{AZ}{ZB}.\frac{BX}{XC}.\frac{CY}{YA}=1$.

7. Dados tres segmentos *a*, *b* y *c*; construir el triángulo cuyos lados son los tres segmentos dados.

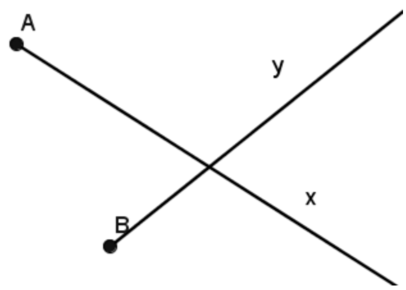
8. Las rectas *r* y *s* son las alturas del triángulo *ABC* en los vértices *A* y *C*. Construir el triángulo.



9. Las rectas r y s son mediatrices de un triángulo ABC. Conocido el vértice A, obtener los dos vértices restantes.



10. Las semirrectas Ax y By son dos bisectrices del triángulo ABC. Construir el triángulo.



11. En una circunferencia de centro C, sea ABC un triángulo con A y B situados en la circunferencia. Hallar el lugar geométrico del circuncentro, del baricentro y del incentro del triángulo cuando el punto A recorre la circunferencia.

12. Construir la parábola a partir de su definición como lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del foco y de la directriz.

13. Sea A un punto interior a una circunferencia c y B un punto de c. Sea P un punto de la prolongación de AB con la condición AB = BP. Determinar el lugar geométrico del punto P al variar el punto B.

14. Sea una recta r y un punto A que no pertenece a r. Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por un punto A y son tangentes a la recta r.