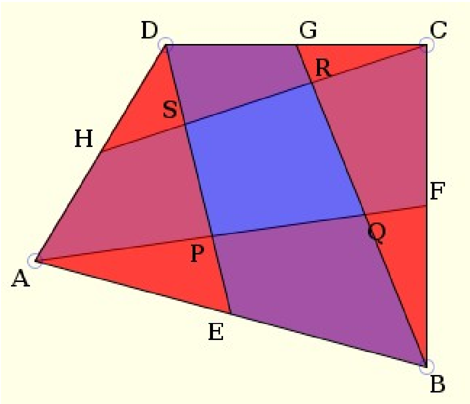
TEOREMA DE LAS ALFOMBRAS (4)

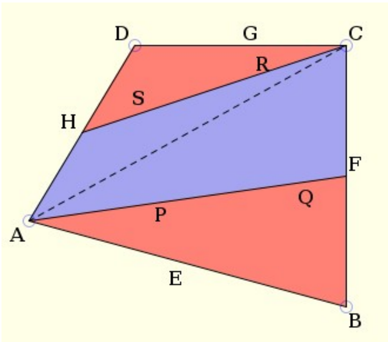
Cuadrilátero 2

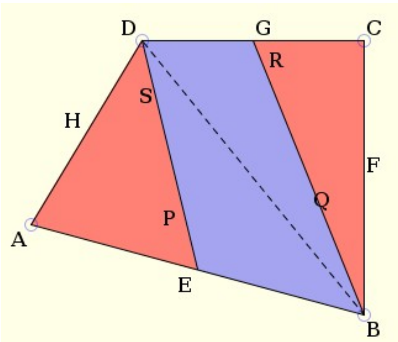
E, F, G, H son los puntos medios de los lados AB, BC, CD, DA del cuadrilátero convexo ABCD. P es la intersección de AF y DE, Q es la intersección de AF y BG, R la intersección de BG y CH, y S la intersección de CH y DE. Se trata de demostrar que:

Area(AEP) + Area(BFQ) + Area(CGR) + Area(DHS) = Area(PQRS).



SOLUCIÓN: Es una consecuencia directa del Teorema de las Alfombras:





Dividimos el cuadrilátero de dos maneras $S_1 \cup S_2 = T_1 \cup T_2$,

donde S1 es el cuadrilátero AFCH y S2 es la unión de los dos triángulos que quedan. Del mismo modo, T1 es el cuadrilátero BGDE y T2 su complemento en el cuadrilátero. Tengamos en cuenta que el área de cada una de las cuatro regiones es la mitad que la de cuadrilátero. Por ejemplo,

Área (ADE) = Área (BDE) y

Área (BCG) = Área (BDG).

La suma de los dos da

Área (ADE) + Área (BCG) = Área (BDE) + Área (BDG) = Área (BGDE).

Por el teorema de las alfombras,

Área (S1 ∩ T1) = Área (S2 ∩ T2).

Pero S1 ∩ T1 es el cuadrilátero PQRS, mientras que S2 ∩ T2 es la unión de triángulos AEP, BFQ, CGR y el DHS, que es lo que tratábamos de probar.