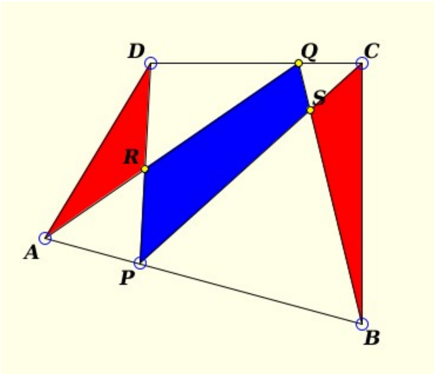
TEOREMA DE LAS ALFOMBRAS (3)

Cuadrilátero 1

Los puntos P y Q están situados en los lados AB y CD de un cuadrilátero convexo ABCD, cumpliéndose que AP / AB = CQ / CD. Sea S la intersección de BQ y CP, R la intersección de AQ y DP. Demostrar que el área azul (cuadrilátero PSQR) es igual a la suma de las áreas rojas (triángulos ARD y BSC.)

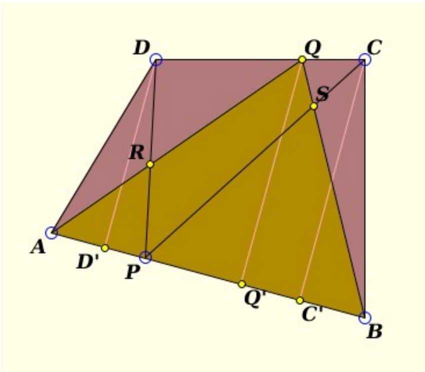


SOLUCIÓN: Llamamos r a la razón AP/AB = CQ/CD = r. Entonces

$$(1) \qquad \begin{aligned} P &= rB + (1 - r)A \\ Q &= rD + (1 - r)C. \end{aligned}$$

Trazamos las perpendiculares CC', QQ' y DD' desde los puntos C, Q y D al lado AB y llamamos c, q y d, respectivamente, a sus longitudes. Entonces:

$$q = rd + (1 - r)c.$$



Por tanto,

$$\text{Area}(ADP) = AP\cdot d / 2 = r\cdot d\cdot AB / 2$$
$$\text{Area}(BCP) = BP\cdot c / 2 = (1 - r)\cdot c\cdot AB / 2$$
$$\text{Area}(AQB) = AB\cdot q / 2 = r\cdot d\cdot AB / 2 + (1 - r)\cdot c\cdot AB / 2,$$

de modo que:

$$(2) \qquad \text{Area}(AQB) = \text{Area}(ADP) + \text{Area}(BCP).$$

Si a AQB lo denotamos como S_1 y CPD como T_1, aplicando Teorema de las Alfombras

$$\text{Área }(S1) = \text{Área }(T1).$$

El mismo resultado se obtiene restando de ambos lados de (2) las áreas de los triángulos APR y BPS.