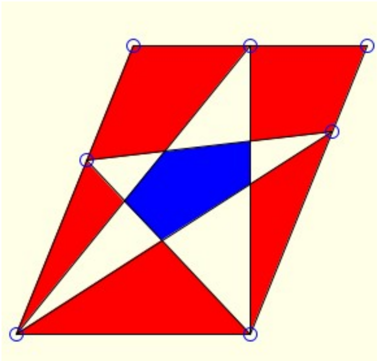
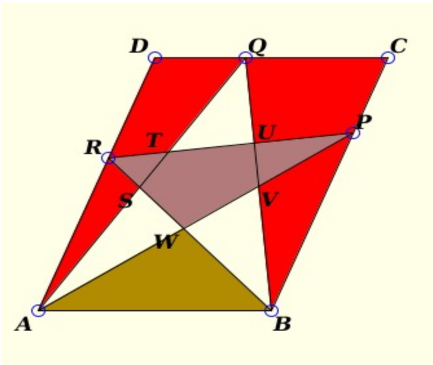
TEOREMA DE LAS ALFOMBRAS (2)

Paralelogramo

Los puntos P, Q y R están situados sobre tres lados del paralelogramo ABCD. Demostrar que, independientemente de su posición, la diferencia entre las áreas de las zonas rojas y azul es constante.



SOLUCIÓN:
Vamos a llamar ROJO al área de dos triángulos ADQ y BCQ. Estos dos triángulos tiene un área igual a la mitad del área del paralelogramo: ROJO = Área(ABCD) / 2.
Llamemos AZUL al área de la región pentagonal STUVW.



Aplicando el Teorema de las Alfombras al trapecio ABPR se deduce que la zona morada y la naranja son iguales:

(1) Area(RST) + AZUL + Area(PUV) = Area(ABW)

Lo que tenemos que demostrar es que

(2) [ROJO - Area(RST) - Area(PUV) + Area(ABW)] – AZUL
es independiente de la posición de los puntos P, Q, R.

Pero en (1) hemos visto que: AZUL= Area(ABW) - Area(RST) - Area(PUV)

De modo que, sustituyendo en (2):

ROJO - Area(RST) - Area(PUV) + Area(ABW) - AZUL = ROJO + AZUL – AZUL = ROJO.