

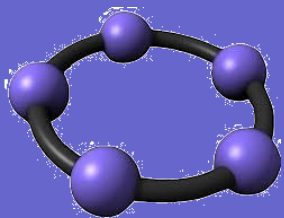
Día GeoGebra de Aragón

Zaragoza, 22/marzo/2014

Cálculo simbólico con GeoGebra 4.x

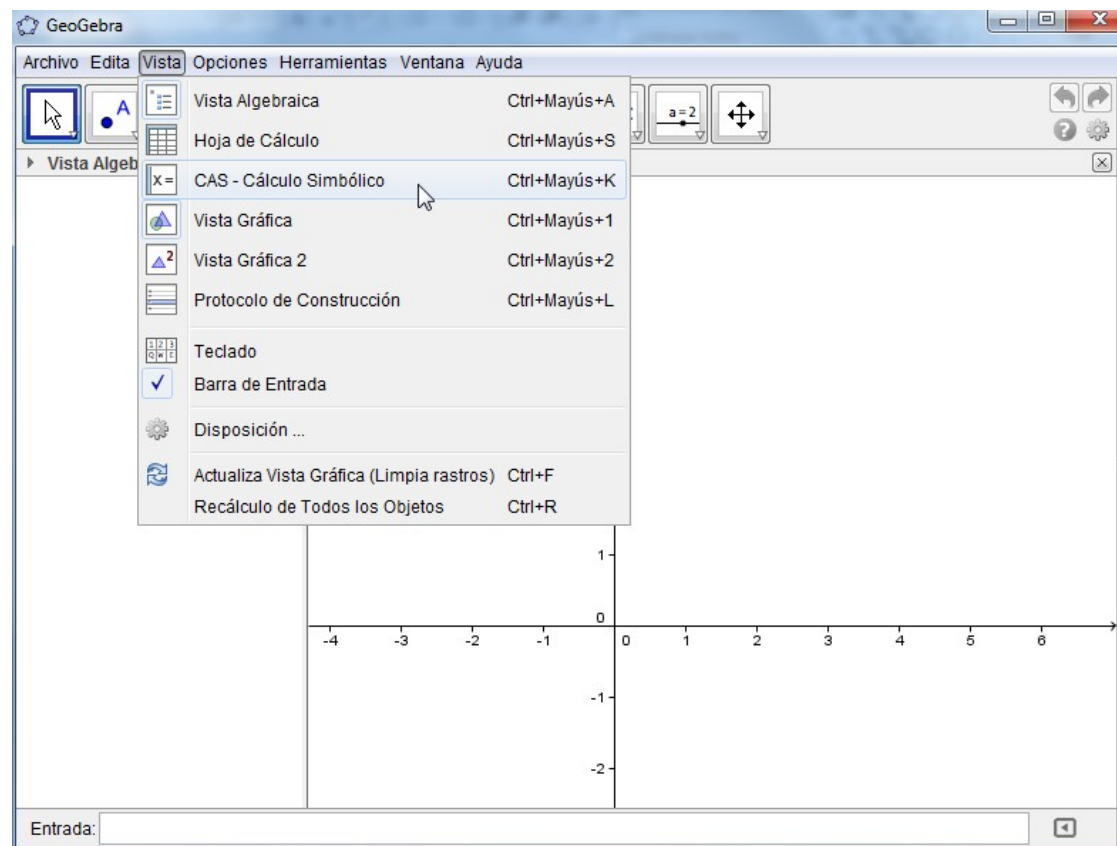
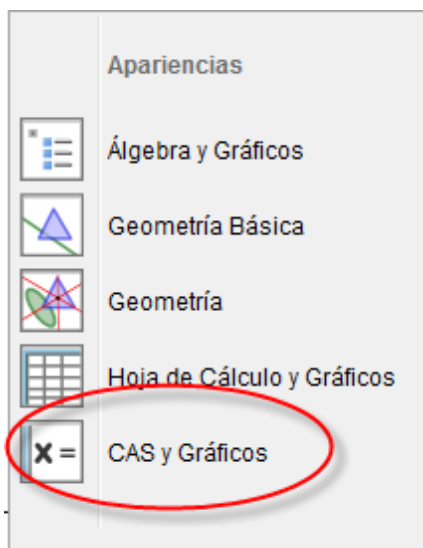
Primeros pasos

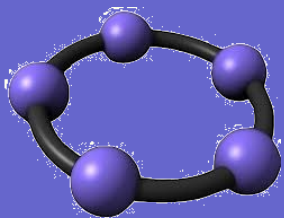
**José Luis Álvarez
Agustín Carrillo**



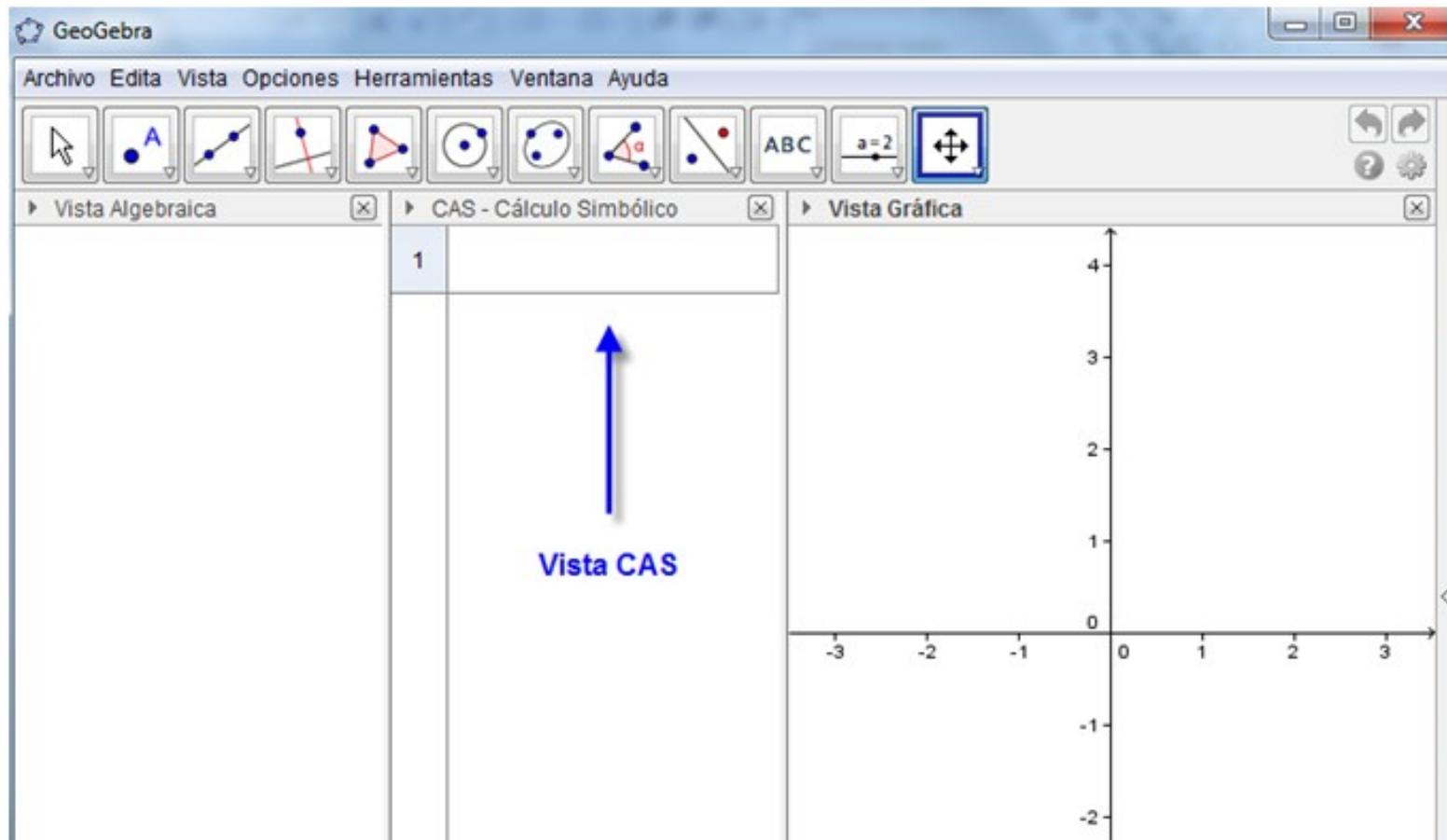
Cálculo simbólico (CAS)

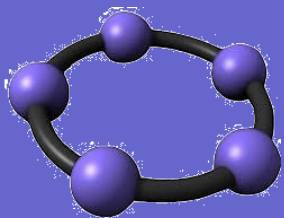
GeoGebra incorpora el CAS a partir de la versión 4.2





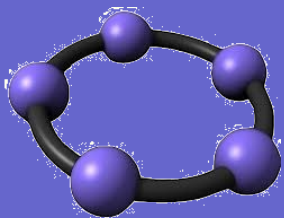
Vista de CAS en GeoGebra 4.4



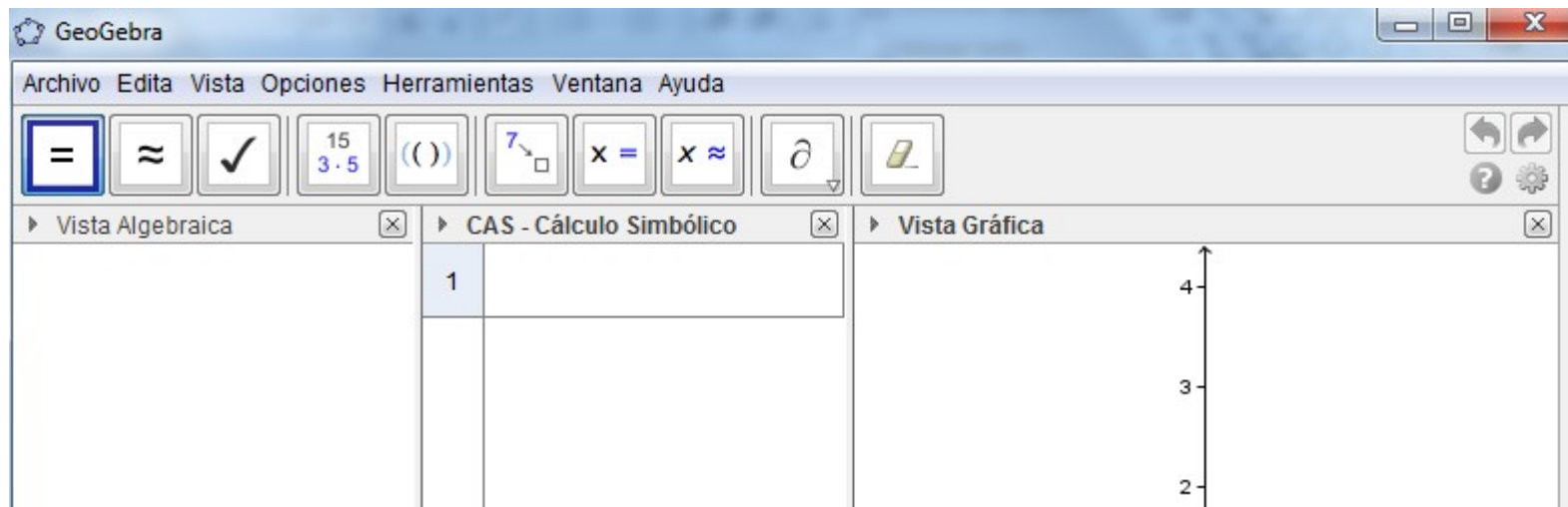


¿Qué podemos hacer con el CAS?

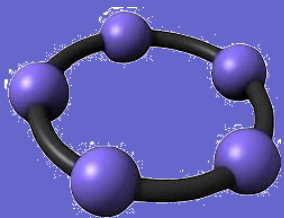
- Factorización de números y polinomios.
- Resolución de ecuaciones.
- Resolución de sistemas de ecuaciones.
- Discusión de sistemas.
- Cálculo diferencial.
- Cálculo integral.
- Cálculo de límites.
- Sumas y productos de series.
- Vectores y matrices.



Vista CAS - Cálculo simbólico



- La vista CAS tiene una barra de herramientas propia.
- Las operaciones y resultados aparecen numerados por filas, de manera similar a otros programas de CAS.



Vista CAS - Cálculo simbólico

Primeras herramientas:

CAS - Cálculo Simbólico	
1	$32 - 1/5$
<input type="radio"/>	$\rightarrow \frac{159}{5}$
2	$2x - 3x + 7x$
<input type="radio"/>	$\rightarrow 6x$



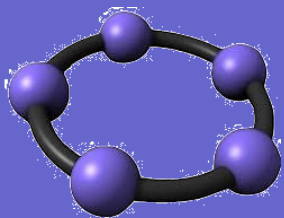
Evalúa
Enter



Valor numérico
Ctrl-Enter

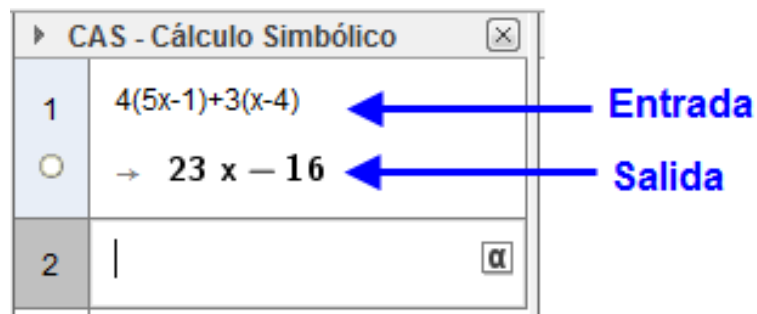


Conserva entrada
Alt-Enter



Vista CAS - Cálculo simbólico

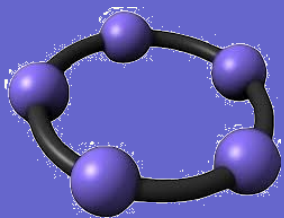
Atajos para la edición



En una fila en blanco, si escribimos:

- = Repite la entrada previa.
-) Repite la entrada previa encerrada entre paréntesis.

Barra espaciadora Repite la salida previa.



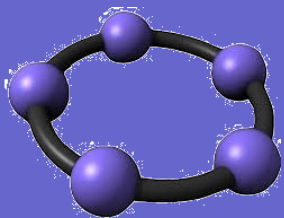
Vista CAS - Cálculo simbólico

The screenshot shows the GeoGebra interface with three views: Vista Algebraica, CAS - Cálculo Simbólico, and Vista Gráfica. In the CAS view, a function is defined as $f(x) := -9x^2 + 2x + 3$. The graph view displays a parabola opening downwards with its vertex at (0, 3) and x-intercepts at approximately -0.37 and 0.78.

View	Content
Vista Algebraica	Función $f(x) = -9x^2 + 2x + 3$
CAS - Cálculo Simbólico	1 $f(x) := -2x[1 - 3x] - 3(x^2 - 1)$ 2 $f(x) := -9x^2 + 2x + 3$
Vista Gráfica	Graph of the parabola $f(x) = -9x^2 + 2x + 3$

Entrada:

Al activar el botón se define una función, que vemos en la vista algebraica y también en la vista gráfica.



Referencias entre filas

Estáticas:

salida previa

#n salida fila n

entrada previa

##n entrada fila n

Dinámicas:

\$ salida previa

\$n salida fila n

\$\$ entrada previa

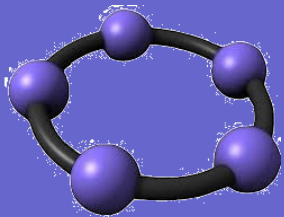
\$\$n entrada fila n

Estática # →

Dinámica \$ →

1	2x+3x	
○	→ 5 x	
2	5x	
○	→ 5 x	
3	\$1	
○	→ 5 x	
4		α

1	2x 3x	
○	→ 6 x ²	
2	5x	
○	→ 5 x	
3	\$1	
○	→ 6 x ²	



Operadores matemáticos

+

-

*

/

^

espacio

Alt - n

Alt - i

unidad imaginaria

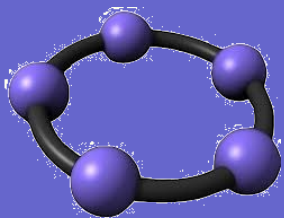
Alt - p pi

Número Pi

Alt - e

Número e

α	β	γ	δ	ε	ζ	η	θ	ι	κ
λ	μ	ν	ξ	ο	ρ	σ	τ	υ	φ
φ	χ	ψ	ω	Γ	Δ	Θ	∞	⊗	≅
≠	≤	≥	¬	∧	∨	→		⊥	∈
≡	⊂	⊄	²	³	°	í	π	e	
«	»	€							
	1								α



Asignación de variables

Geogebra

Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda

= ≈ ✓ 15 3.5 (()) 7 x = x ≈ ∂

▶ Vista Algebraica ▶ CAS - Cálculo Simbólico ▶ Vista Gráfica

Función
● $f(x) = \text{sen}(x) x$

Lista
○ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

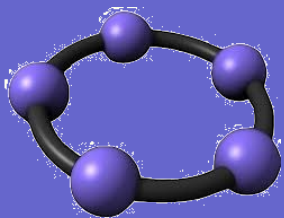
Número
○ $a = 4$

1	$a=4$
○	$\rightarrow a = 4$
2	$2a$
○	$\rightarrow 2a$
3	$a:=4$
○	$\rightarrow a := 4$
4	$2a$
○	$\rightarrow 8$
5	$A:=\{\{1,2,3\},\{4,5,6\}\}$
○	$\rightarrow A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
6	$f(x):=x \sin(x)$
●	$\rightarrow f(x) := \text{sen}(x) x$
7	$\text{RangoMatriz}[A]$
○	$\rightarrow 2$
8	$f(3)$
○	$\rightarrow 3 \text{ sen}(3)$
9	

En la vista CAS para definir una variable se utiliza :=

CAS - Cálculo Simbólico

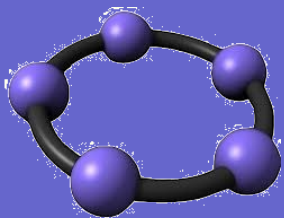
1	$a=4$
○	$\rightarrow a = 4$
2	$2a$
○	$\rightarrow 2a$
3	$a:=4$
○	$\rightarrow a := 4$
4	$2a$
○	$\rightarrow 8$



Copiar y pegar expresiones

The screenshot shows a software interface with a table-like structure. The first row contains the expression $(159 / 5) + (6x)$. The second row contains a fraction $\frac{30x + 159}{5}$, which is highlighted with a dashed border. A context menu is open over this fraction, listing the following options: "Copia", "Copia como LaTeX", "Copia como Fórmula LibreOffice", and "Copia como Imagen". Below this, a separate row shows a button labeled "Pega" with a mouse cursor hovering over it.

También podemos utilizar los tradicionales Ctrl-C y Ctrl-V



Primeras operaciones: factorizar



Factoriza(número)

Factoriza(expresión)

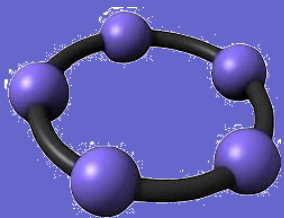
13	20!
<input type="radio"/>	→ 2432902008176640000
14	Factoriza[2432902008176640000]
<input type="radio"/>	→ $2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$

11	$1+2x+x^2$
<input type="radio"/>	Factoriza: $(x + 1)^2$
12	Factoriza[(1+2x+x^2)]
<input type="radio"/>	→ $(x + 1)^2$

CAS - Cálculo Simbólico

1	$a^{(8/3)}-b^{(4/5)}$
<input type="radio"/>	Factoriza: $(\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[5]{b^2}) (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[5]{b}) (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[5]{b})$
2	

Factoriza(expresión, variable)



Primeras operaciones: factorizar



Factoriza(número)

Factoriza(expresión)

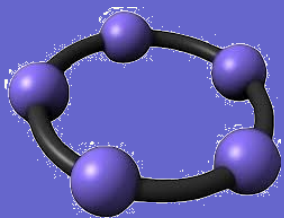
13	20!
<input type="radio"/>	→ 2432902008176640000
14	Factoriza[2432902008176640000]
<input type="radio"/>	→ $2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$

11	$1+2x+x^2$
<input type="radio"/>	Factoriza: $(x + 1)^2$
12	Factoriza[(1+2x+x^2)]
<input type="radio"/>	→ $(x + 1)^2$

CAS - Cálculo Simbólico

1	$a^{(8/3)}-b^{(4/5)}$
<input type="radio"/>	Factoriza: $(\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[5]{b^2}) (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[5]{b}) (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[5]{b})$
2	

Factoriza(expresión, variable)



Divisores, MCD y MCM

MCD Máximo común divisor

MCM Mínimo común múltiplo

1	División[$x^4 + x^3 + 4x^2 + 6x + 2, x^2 + 3$]
○	→ $\{x^2 + x + 1, 3x - 1\}$
2	División[30,4]
○	→ {7,2}

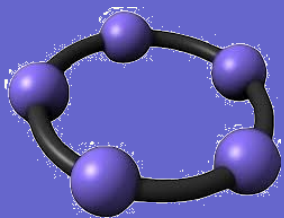
Divisores

ListaDivisores

21	MCM[24,40]
○	→ 120
22	MCD[24,40]
○	→ 8
23	MCM[$x^2 - 7x + 10, x^2 - 3x - 10$]
○	→ $x^3 - 5x^2 - 4x + 20$
24	MCD[$x^2 - 7x + 10, x^2 - 3x - 10$]
○	→ $x - 5$

División obtenemos: {cociente, resto}

1	Divisores[36]
○	→ 9
2	ListaDivisores[36]
○	→ {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}



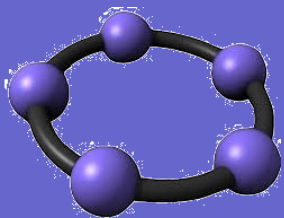
Números primos y divisores de un número

ACTIVIDAD:

Con ayuda de un deslizador, determina la lista de divisores de los números menores que 100 para establecer cuáles son primos y cuales no.

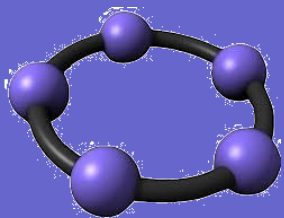
The screenshot shows the GeoGebra CAS interface. The top menu bar includes 'Archivo', 'Edita', 'Vista', 'Opciones', 'Herramientas', 'Ventana', and 'Ayuda'. Below the menu is a toolbar with various geometric and algebraic tools. The main workspace is divided into three views: 'Vista Algebraica', 'CAS - Cálculo Simbólico', and 'Vista Gráfica'. In the 'Vista Algebraica' view, a variable 'n' is defined with a value of 1. In the 'CAS - Cálculo Simbólico' view, the command 'ListaDivisores[n]' is entered, and the result is shown as '{1}'. In the 'Vista Gráfica' view, a slider for 'n' is shown with a value of 1.

Comandos: [EsPrimo](#) [PrimoPrevio](#) [PrimoSiguiente](#)

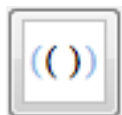


Números primos y divisores de un número

CAS - Cálculo Simbólico		Vista Gráfica
1	ListaDivisores[n] → {1, 2, 3, 4, 6, 12}	<p>A horizontal line with a solid black dot in the center. Above the dot is the text "n = 12".</p>
2	EsPrimo[n] → false	
3	PrimoPrevio[n] → 11	
4	PrimoSiguiente[n] → 13	



Desarrollo y sustitución



Desarrolla

CAS - Cálculo Simbólico

1	$3(x^2-4x+2)-4(x^2-x-2)$
<input type="radio"/>	$\rightarrow -x^2 - 8x + 14$
2	

1	$3(x^2-4x+2)-4(x^2-x-2)$	<input type="checkbox"/>
<input type="radio"/>	$\rightarrow 3(x^2 - 4x + 2) - (4x^2 - 4x - 8)$	



Sustituye

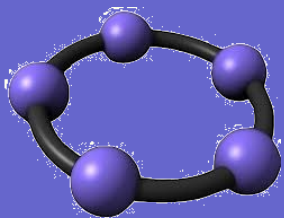
Sustituye - Fila 1

Expresión Pre...	Nueva expresi...
x	

= ≈ ✓

Sustituye[expresión, variable, valor]

1	$3(x^2-4x+2)-4(x^2-x-2)$
<input type="radio"/>	$\rightarrow -x^2 - 8x + 14$
2	$3(x^2-4x+2)-4(x^2-x-2)$
<input type="radio"/>	Sustituye, x=2: -6



Resolución de ecuaciones

Hay diferentes formas de resolver una ecuación o hallar las raíces de un polinomio.



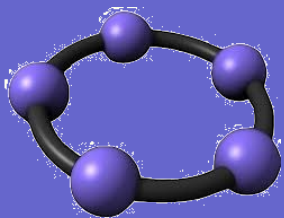
Resuelve

Resuelve[ecuación]

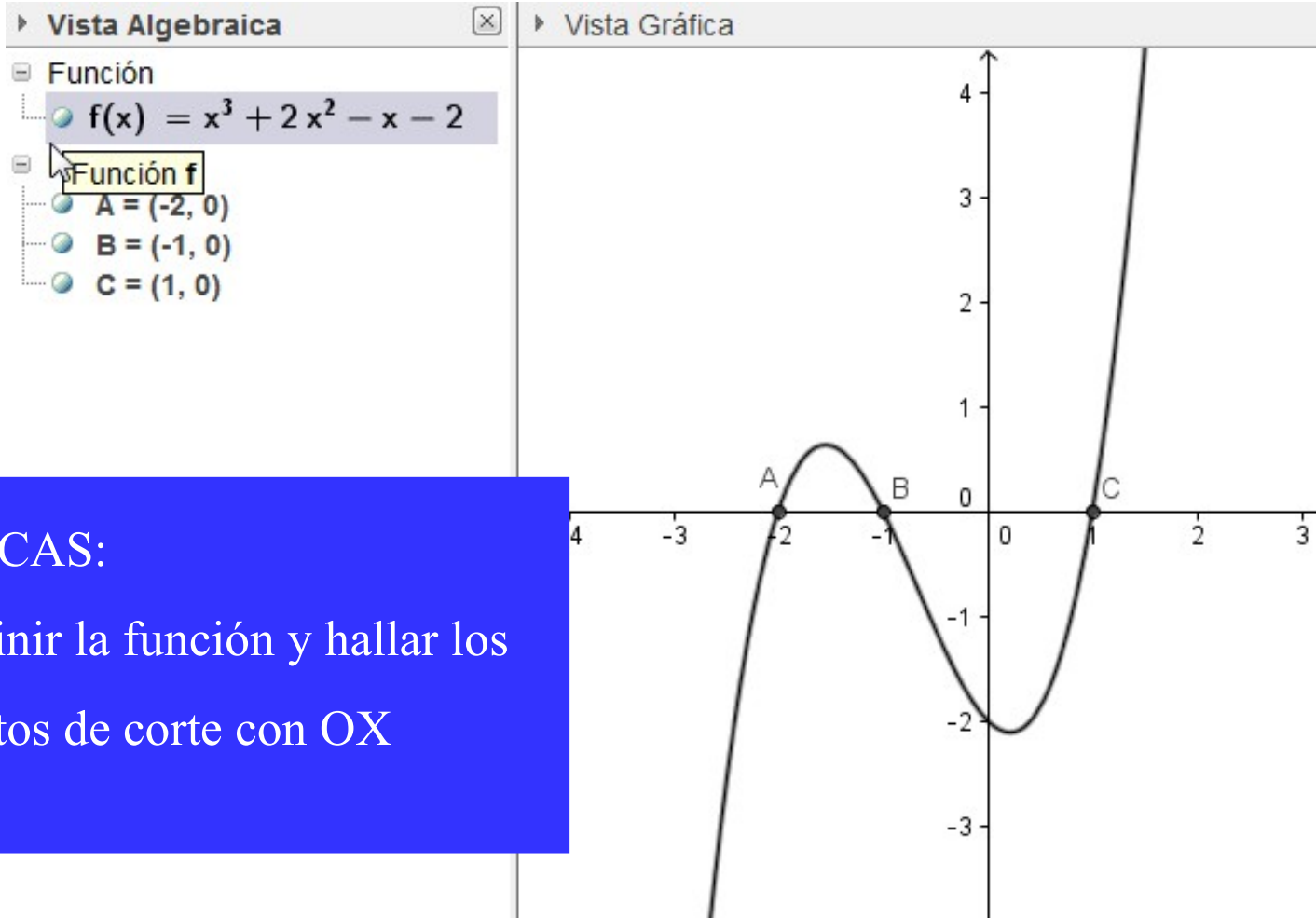
Soluciones[ecuación]

Raíz[Polinomio]

CAS - Cálculo Simbólico	
1	x^2+2x^2-x-2
<input type="radio"/>	Resuelve: $\{x = 1, x = -1, x = -2\}$
2	Resuelve[x^2+2x^2-x-2]
<input type="radio"/>	$\rightarrow \{x = 1, x = -1, x = -2\}$
3	Soluciones[x^2+2x^2-x-2]
<input type="radio"/>	$\rightarrow \{1, -1, -2\}$
4	Raíz[x^2+2x^2-x-2]
<input type="radio"/>	$\rightarrow \{x = 1, x = -1, x = -2\}$
5	x^2+2x^2-x-2
<input type="radio"/>	Factoriza: $(x + 2) (x + 1) (x - 1)$

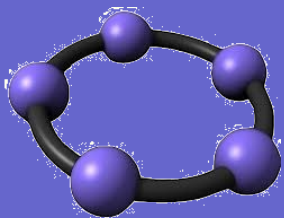


Resolución de ecuaciones



Sin CAS:

Definir la función y hallar los puntos de corte con OX



Resolución de ecuaciones

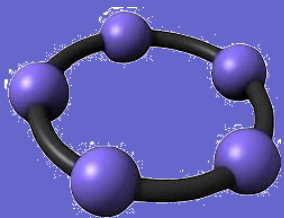
Ecuaciones con soluciones no reales

`RaízCompleja`[polinomio]

`SolucionesC`[ecuación]

`ResoluciónC`[ecuación]

CAS - Cálculo Simbólico	
1	<code>Resuelve</code> [x^4-1] → $\{x = 1, x = -1\}$
2	<code>ResoluciónC</code> [x^4-1] → $\{x = i, x = -i, x = 1, x = -1\}$
3	<code>Soluciones</code> [x^4-1] → $\{1, -1\}$
4	<code>SolucionesC</code> [x^4-1] → $\{i, -i, 1, -1\}$
5	<code>Raíz</code> [x^4-1] → $\{x = 1, x = -1\}$
6	<code>RaízCompleja</code> [x^4-1] → $\{i, -i, 1, -1\}$



Resolución de ecuaciones

Vista Algebraica CAS - Cálculo Simbólico Vista Gráfica

Función
● $f(x) = \text{sen}(x) x$

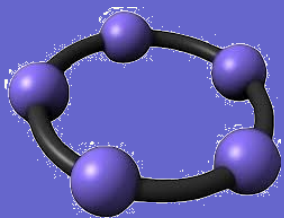
1	$x \text{ sen}(x)$
<input type="radio"/>	Resuelve: $\{x = 2 k_1 \pi + \pi, x = 2 k_1 \pi, x = 0\}$
2	Resuelve[$x \text{ sen}(x)$]
<input type="radio"/>	$\rightarrow \{x = 2 k_8 \pi + \pi, x = 2 k_8 \pi, x = 0\}$
3	Soluciones[$x \text{ sen}(x)$]
<input type="radio"/>	$\rightarrow \{2 k_9 \pi + \pi, 2 k_9 \pi, 0\}$

CAS - Cálculo Simbólico

1	$x \text{ sen}(x)$
<input type="radio"/>	Resuelve: $\{x = 2 k_1 \pi + \pi, x = 2 k_1 \pi, x = 0\}$
2	Resuelve[$x \text{ sen}(x)$]
<input type="radio"/>	$\rightarrow \{x = 2 k_8 \pi + \pi, x = 2 k_8 \pi, x = 0\}$
3	Soluciones[$x \text{ sen}(x)$]
<input type="radio"/>	$\rightarrow \{2 k_9 \pi + \pi, 2 k_9 \pi, 0\}$

Entrada:

Ecuaciones no polinómicas



Factorización de polinomios

Factores[polinomio]

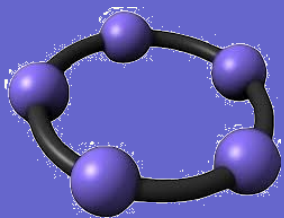
	Factores[x^4+3x^2-4]
11	
○	→ $\begin{pmatrix} x^2 + 4 & 1 \\ x + 1 & 1 \\ x - 1 & 1 \end{pmatrix}$

Factoriza[polinomio]

	Factoriza[x^4+3x^2-4]
12	
○	→ $(x^2 + 4) (x + 1) (x - 1)$

FactorC[polinomio]

	FactorC[x^4+3x^2-4]
13	
○	→ $(x + 2 i) (x - 2 i) (x + 1) (x - 1)$



Resolución numérica de ecuaciones

SolucionesN

6 SolucionesN[x⁶+x-2]

○ → {-1.21, 1}

ResoluciónN

7 ResoluciónN[x⁶+x-2]

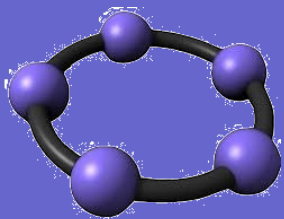
○ → {x = -1.21, x = 1}

SolucionesN[ecuación, variable]

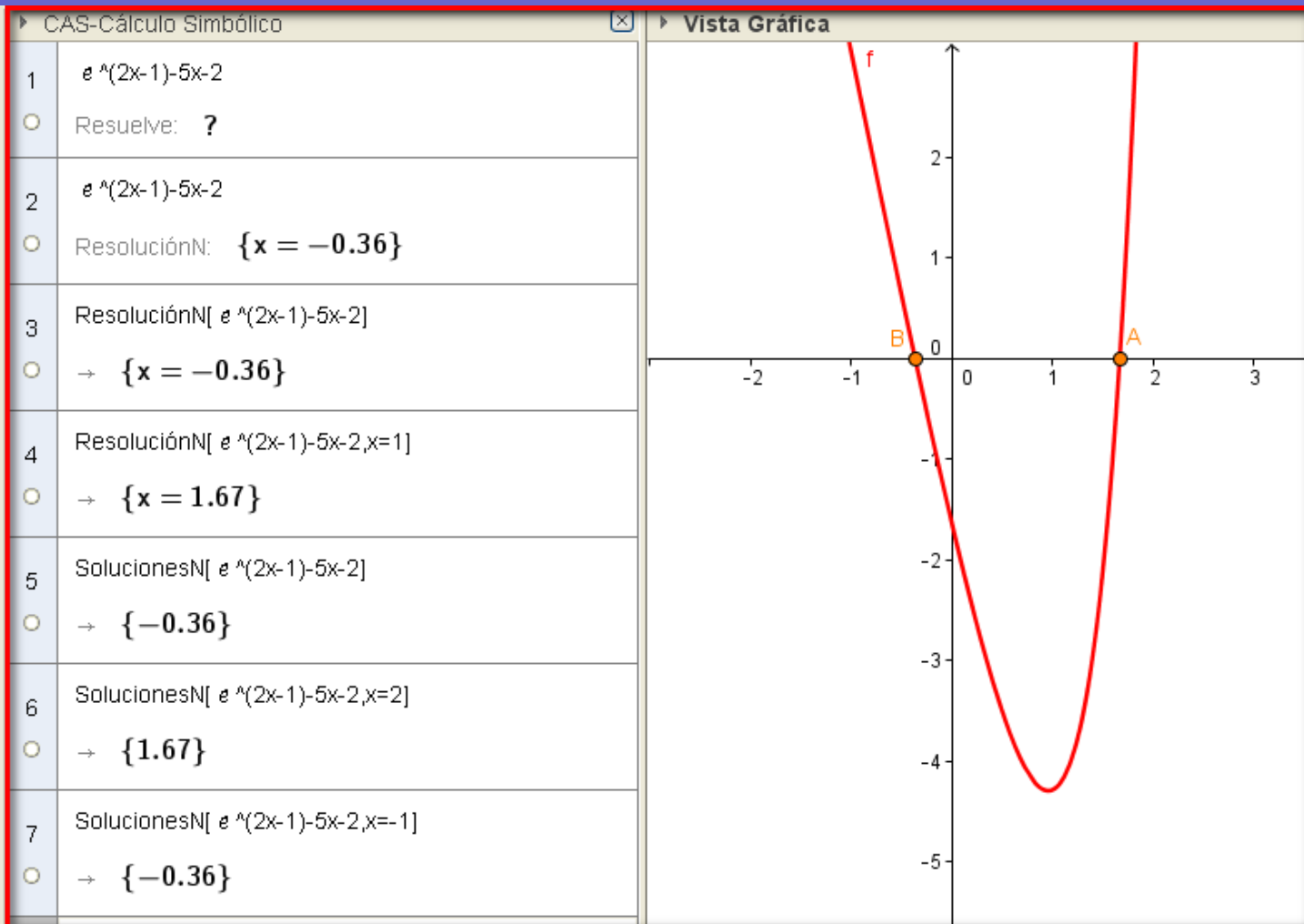
SolucionesN[ecuación, variable=valor inicial]

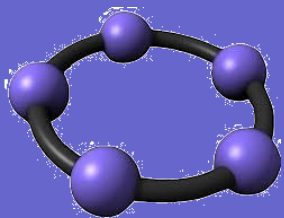
ResoluciónN[ecuación, variable]

ResoluciónN[ecuación, variable=valor inicial]



Resolución numérica de ecuaciones





Resolución de sistemas de ecuaciones

Los mismos comandos utilizados en la resolución de ecuaciones.

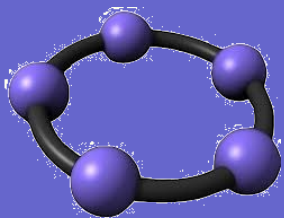
Lista de ecuaciones (entre paréntesis, separadas por comas)

Soluciones[{ecuación₁,ecuación₂,...},{x, y, z, ...}]

Resuelve[{ecuación₁,ecuación₂,...},{x, y, z, ...}]

$$\begin{pmatrix} 3x+2y-3z=1 \\ x+3y-2z=-3 \\ 4x-y-5z=4 \end{pmatrix}$$

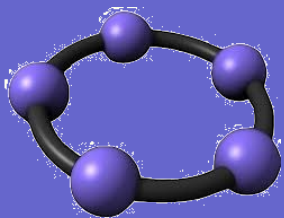
1	Soluciones[{3x+2y-3z=1,x+3y-2z=-3,4x-y-5z=4},{x,y,z}]
○	→ (2 -1 1)



Resolución de sistemas de ecuaciones

Sistemas
compatibles
indeterminados y
sistemas
incompatibles

CAS - Cálculo Simbólico	
1	$\{x-2y+3z=1, y+2z=-3, x-3y+z=4\}$
<input type="radio"/>	Resuelve: $(x = -7c_1 - 5 \quad y = -2c_1 - 3 \quad z = c_1)$
2	Resuelve $\{\{x-2y+3z=1, y+2z=-3, x-3y+z=4\}, \{x, y, z\}\}$
<input type="radio"/>	$\rightarrow (x = -7c_4 - 5 \quad y = -2c_4 - 3 \quad z = c_4)$
3	Resuelve $\{\{x-2y+3z=1, y+2z=-3, x-3y+z=4\}, \{x, y\}\}$
<input type="radio"/>	$\rightarrow (x = -7z - 5 \quad y = -2z - 3)$
4	Resuelve $\{\{x-2y+3z=1, y+2z=-3, x-3y+z=4\}, \{x, z\}\}$
<input type="radio"/>	$\rightarrow \left(x = \frac{7y + 11}{2} \quad z = \frac{-y - 3}{2} \right)$
5	Resuelve $\{\{x-2y+3z=1, y+2z=-3, x-3y+z=5\}, \{x, y, z\}\}$
<input type="radio"/>	$\rightarrow \{\}$

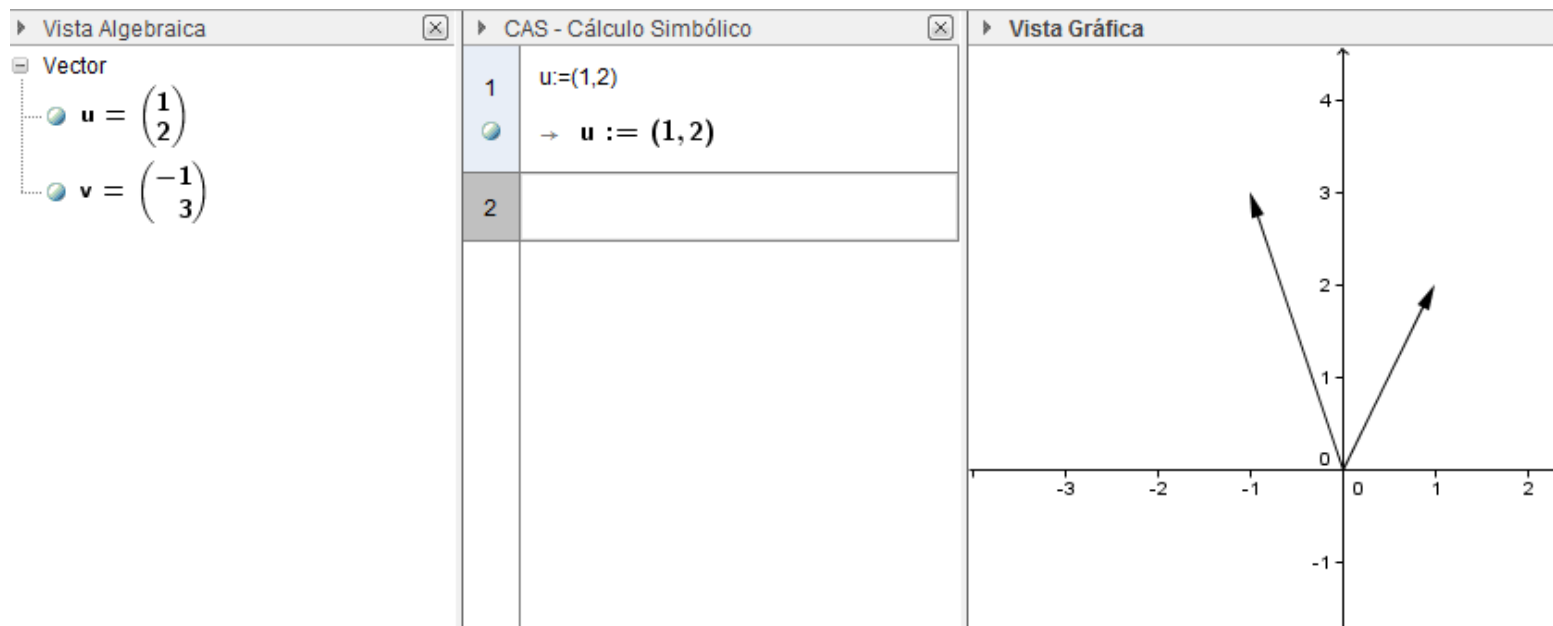


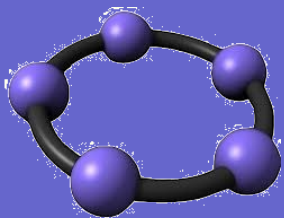
Vectores y matrices

Atención a la definición de vectores

En la vista algebraica $u=(a,b)$

En la vista CAS $u:= (a,b)$





Vectores y matrices

Definición de matrices

En la vista algebraica

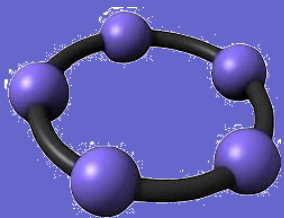
$$A = \{\{a_{11}, a_{12}, \dots\}, \{a_{21}, a_{22}, \dots\}, \dots\}$$

En la vista CAS

$$A := \{\{a_{11}, a_{12}, \dots\}, \{a_{21}, a_{22}, \dots\}, \dots\}$$

The screenshot displays two windows from a mathematical software interface:

- Vista Algebraica:** Shows a list containing two matrix definitions:
 - $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
 - $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
- CAS - Cálculo Simbólico:** Shows a list with two entries:
 - 1: $B := \{\{3, 1\}, \{0, 2\}\}$
 - 2: $\rightarrow B := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$



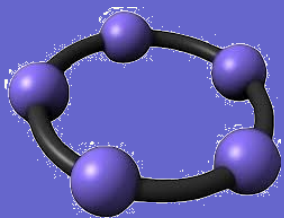
Operaciones con vectores

CAS - Cálculo Simbólico	
1	a:={1,3,2}
<input type="radio"/>	→ a := {1,3,2}
2	b:={0,-2,5}
<input type="radio"/>	→ b := {0,-2,5}
3	a+b
<input type="radio"/>	→ {1,1,7}
4	3a+2b
<input type="radio"/>	→ {3,5,16}

Producto Escalar

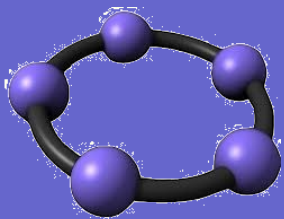
Producto Vectorial

5	ProductoEscalar[a,b]
<input type="radio"/>	→ 4
6	ProductoVectorial[a,b]
<input type="radio"/>	→ {19,-5,-2}



Operaciones con matrices

Vista Algebraica	CAS - Cálculo Simbólico
<p>Lista</p> <ul style="list-style-type: none">$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	<p>1</p> <p>$B := \{\{3,1\},\{0,2\}\}$</p> <p>$\rightarrow B := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$</p>
	<p>2</p> <p>A+B</p> <p>$\rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$</p>
	<p>3</p> <p>2A</p> <p>$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$</p>
	<p>4</p> <p>AB</p> <p>$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$</p>



Comandos para el álgebra matricial

Dimensiones de una matriz

Dimensión[matriz]

Matriz identidad de orden n:

Identidad[n]

Determinante de una matriz:

Determinante[matriz]

Inversa de una matriz:

Inversa[matriz]

Transpuesta de una matriz:

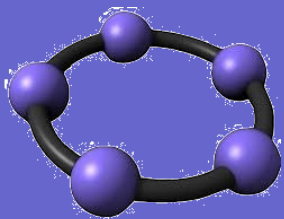
Traspone[matriz]

Rango de una matriz

RangoMatriz[matriz]

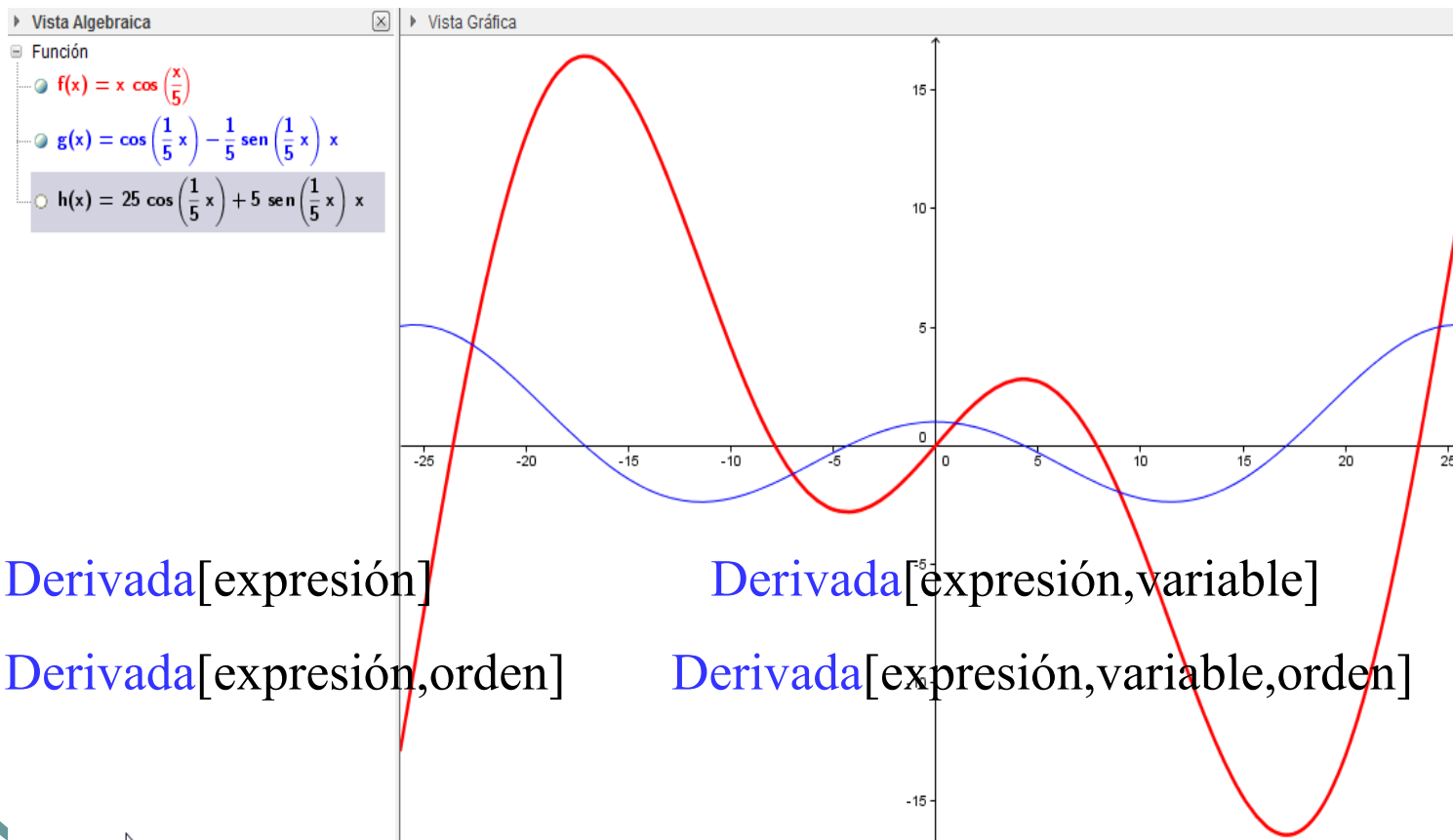
Reducción

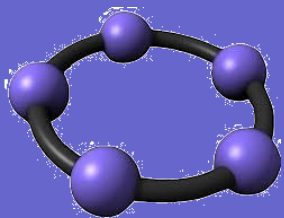
EscalonadaReducida[matriz]



Aplicaciones al análisis

Desde la vista algebraica

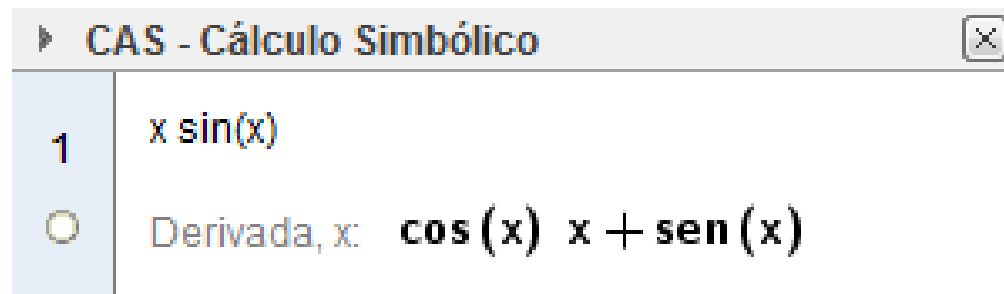




Derivadas



Derivada



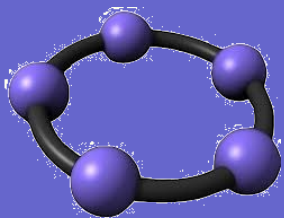
Derivada[expresión]

Derivada[expresión,variable]

Derivada[expresión,variable,orden]

DerivadaImplícita[f(x,y)]

DerivadaImplícita[f(x,y), v dependiente, v independiente]



Integrales



Integral

7

$$x^3 - 2x$$

○

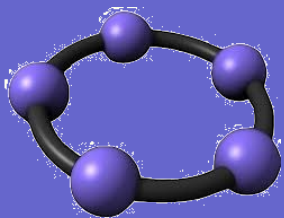
$$\text{Integral, x: } \frac{1}{4} x^4 - x^2 + c_1$$

Integral[expresión]

Integral[expresión,variable]

Integral[expresión, valor inicial, valor final]

Integral[expresión,variable,valor inicial, valor final]



Cálculo de límites

Límite[función, valor]

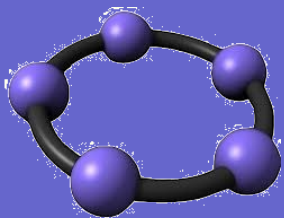
Límite[función, variable, valor]

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$$

$$\frac{1 - \cos 2x}{x^2}$$

$$\left(\frac{x}{2+x}\right)^{3x}$$

CAS - Cálculo Simbólico	
1	Límite[(x ² -2x+1)/(x ³ -x),1]
<input type="radio"/>	→ 0
2	Límite[(1-cos(2x))/x ² ,x,0]
<input type="radio"/>	→ 2
3	Límite[(x/(2+x))^(3x),∞]
<input type="radio"/>	→ $\frac{1}{e^6}$



Límites laterales

Por la izquierda:

LímiteInferior[expresión, variable, valor]

Por la derecha:

LímiteSuperior[expresión, variable, valor]

Hallar los límites laterales de la función f en el punto $x = 0$, siendo:

$$f(x) = (2 + x)^{\frac{1}{x}}$$